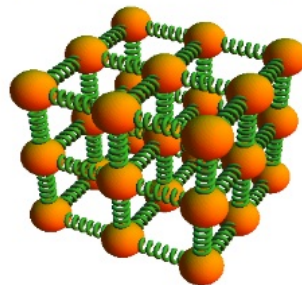


Hoofdstuk 8 Trillingen



**proefwerk:
dinsdag 28
september**



Ga naar de site van CMA en installeer het programma, *Coach 7*
voer de gebruikersnaam in: **Fons Vitae**

gebruik de geheime code:

PC/Mac-versie: **uigw5iihkpcvv**

Tablet-versie: **uihx6jjilralv**

Je zult succesvol zijn op het proefwerk als...

- §8.1 A. Je weet wat deze kenmerken van een trillen massa-veersysteem voorstellen: **massa, veerconstante, rustlengte, evenwichtsstand, amplitude, uitwijking, trillingstijd/periode, frequentie.**
- B. Je kunt rekenen aan trillingen met $f = 1/T$.
- C. Je uit een **oscilloscoopbeeld** de trillingstijd en frequentie van een trilling kunt bepalen.
- §8.2 D. Je weet wat **harmonische trillingen** zijn en onder welke voorwaarde deze ontstaan.
- E. Je kunt rekenen aan veerkracht met $F = -C * u$.
- F. Je kunt rekenen aan harmonisch trillende **veer-massasystemen** met: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$
- §8.3 G. Je harmonische trilling in verband kunt brengen met **energie** m.b.v. $E_v = 1/2 * C * u^2$.
- H. Je kunt uitleggen wat deze begrippen betekenen: **eigenfrequentie, resonantie, gedreven en gedempte trillingen en zwevingen.**
- §8.4 I. Je kunt uitleggen wat **fase, gereduceerde fase en fasehoek** zijn en hoe je deze in een formule kunt beschrijven.
- J. Je een complete **wiskundige beschrijving van een trilling** kunt geven met $y = A * \sin(2\pi * t/T)$.
- K. Je de **maximale snelheid** van een trilling kunt berekenen met $v_{\max} = 2\pi * A/T$.

proefwerk:
dinsdag 28
september

Grootheid	symbol in formule	SI-Eenheid	symbol van de eenheid
frequentie	f	Herz	Hz
trillingstijd	T	seconde	/s s ⁻¹
amplitude	A	meter	s
uitwijking	u	meter	m
massa	m	kilogram	m
kracht	F	newton	kg
energie	E	joule	N
fase	φ	-geen- ("dimensieloos")	J
fasehoek	α	graden	°
tijd/tijdsduur	t	seconde	rad
snelheid	v	meter per seconde	s
			m/s
Constanten en stofeigenschappen			
veerconstante			

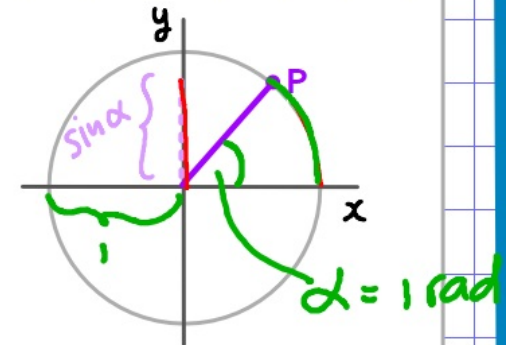
Wiskundige en rekenkundige technieken

HERHALING GONIOMETRIE



kleine hoeken-benadering:

"Voor hoeken α tot 0,2 rad (oftewel 10 graden) geldt:
 $\sin \alpha = \alpha$ en ook $\tan \alpha = \alpha$."
 LET OP: Dit geldt alleen als je in radialen werkt.



lineairiseren van functies

opgave 24

b) rechte lijn, want: c) $T^2 = \frac{4\pi^2}{C} \cdot m$
 $T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{m}{C}$
 $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{C}$
 $y = a \cdot x + b$

de afgeleide v.e. functie gebruiken

$y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
 $\frac{dy}{dt} = v = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2\pi}{T}$
 wordt maximaal 1 dus $v_{\max} = 2\pi \cdot \frac{A}{T}$

Belangrijke terugkerende natuurkundige principes

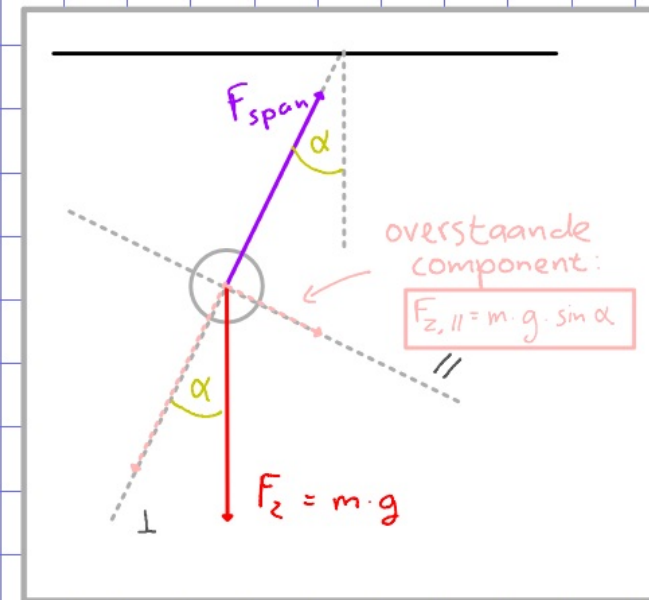
behoud van energie



nettokracht en eerste wet van Newton

"Als de **nettokracht op een voorwerp nul is**, dan beweegt het voorwerp **eenparig** of staat het stil."

nettokracht in twee dimensies (x/y)

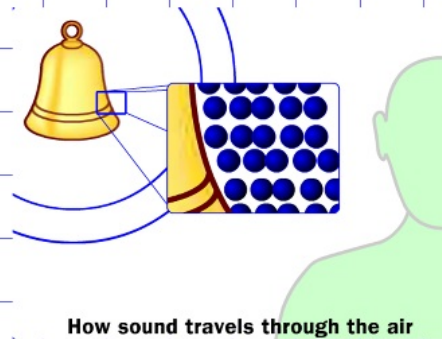
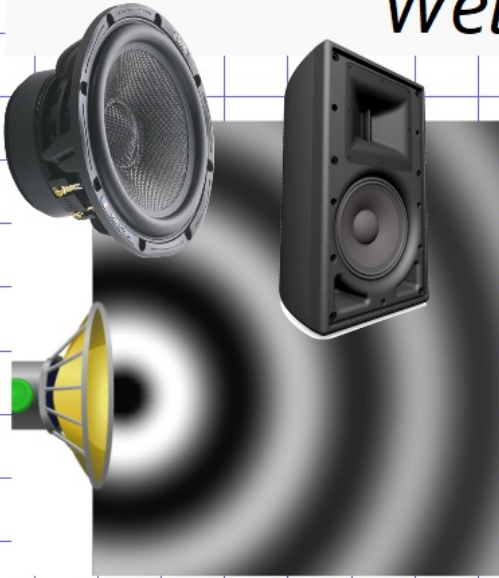


Hoofdstuk 8 Trillingen

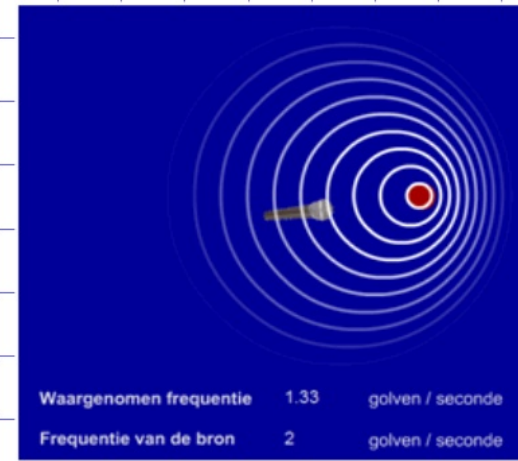
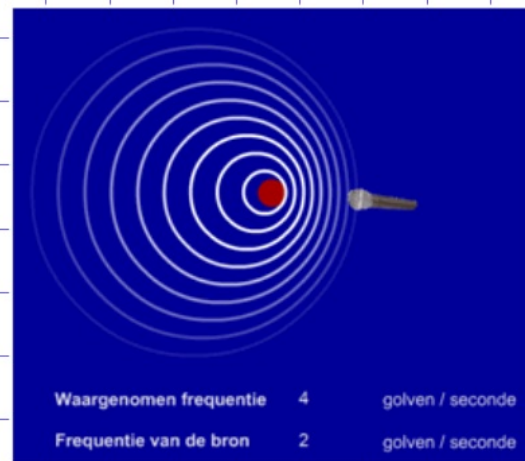
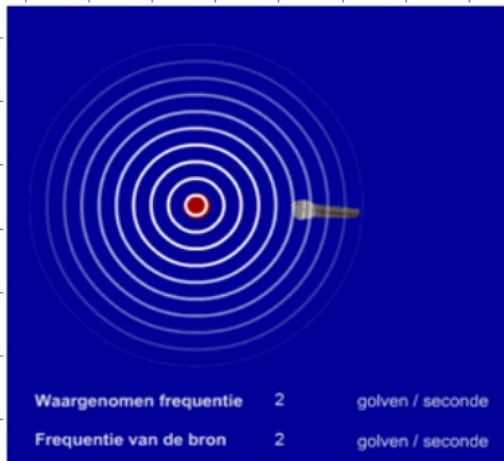
- *CONTEXT* -

De volgende pagina's geven interessante achtergrondinformatie bij de stof van dit hoofdstuk zoals voorbeelden uit de natuur van de verschijnselen of technische toepassingen van de natuurkundige inzichten bij deze verschijnselen. Zulke achtergrond informatie heet ook wel context. Het is niet noodzakelijk om deze pagina's te bestuderen voor het proefwerk maar het is wel interessante kennis!

"Welke trillingen veroorzaken geluid?"



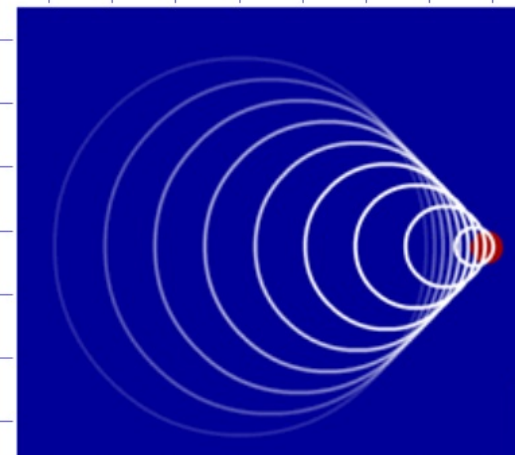
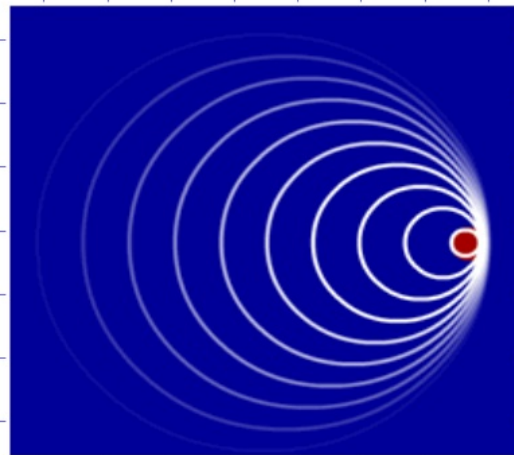
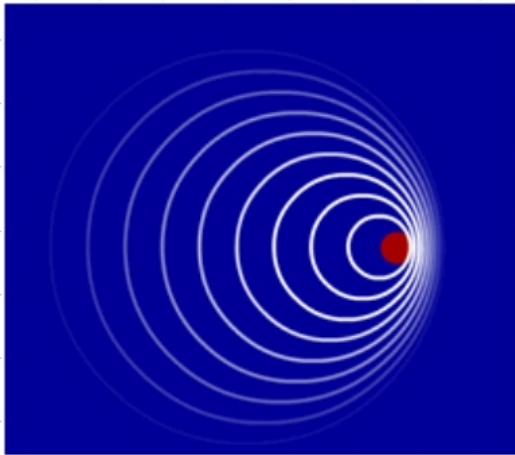
"Hoe ontstaat het Doppler-effect?"



[Dopplereffect \(YouTube\)](#)

[Animatie doppler/sonic \(Ingevoegd\)](#)

"Hoe ontstaat de supersone knal?"



Doppler (Animatie, Emb)

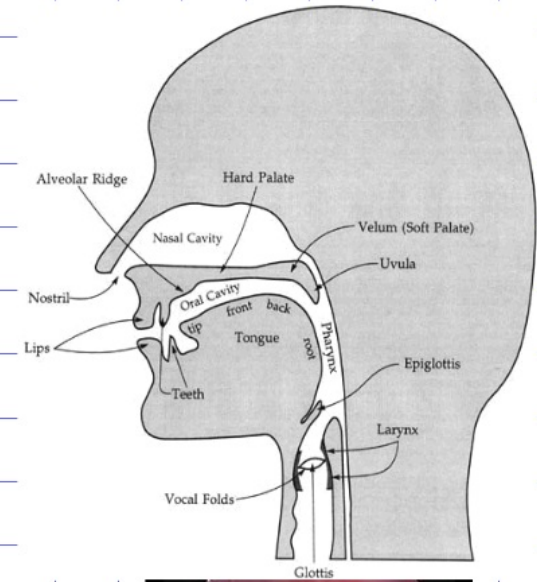
Sonic Boom
Compilatie (YouTube)

*"Waarom klink je stem hoger als je
helium hebt geinhaleerd?"*



[Morgan Freeman and Jimmy Fallon on Helium \(YouTube\)](#)

[Adam Savage, Helium vs Sulfur Hexafluoride \(YouTube\)](#)



"Kun je een glas kapotzingen met je stem?"



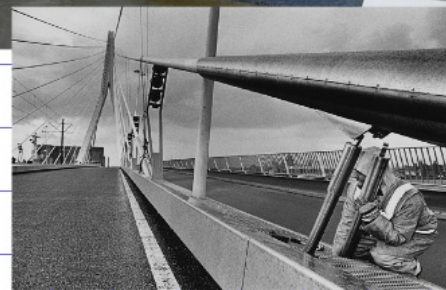
[High Pitched Voice Breaks Glass \(YouTube/Online\)](#)

[Breaking Wine Glass Resonance Strobe \(YouTube/Online\)](#)

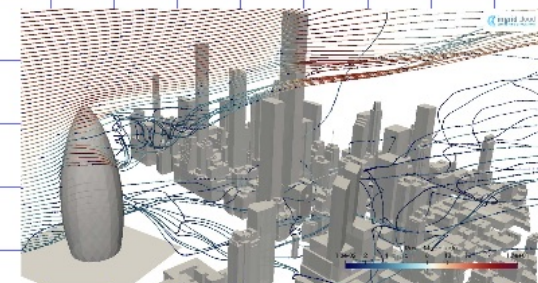
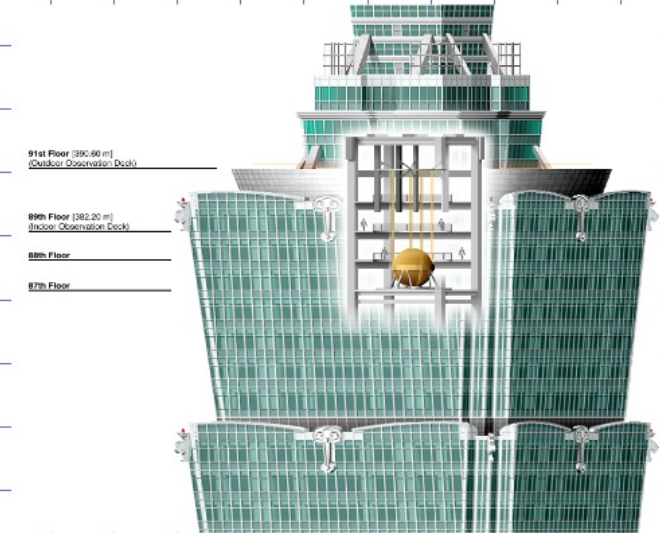
[Tacoma Narrows Bridge Collapse \(YouTube\)](#)

[Mythbusters Breaking Glass \(YouTube\)](#)

"Hoe moeten bouwkundigen rekening houden met trillingen?"

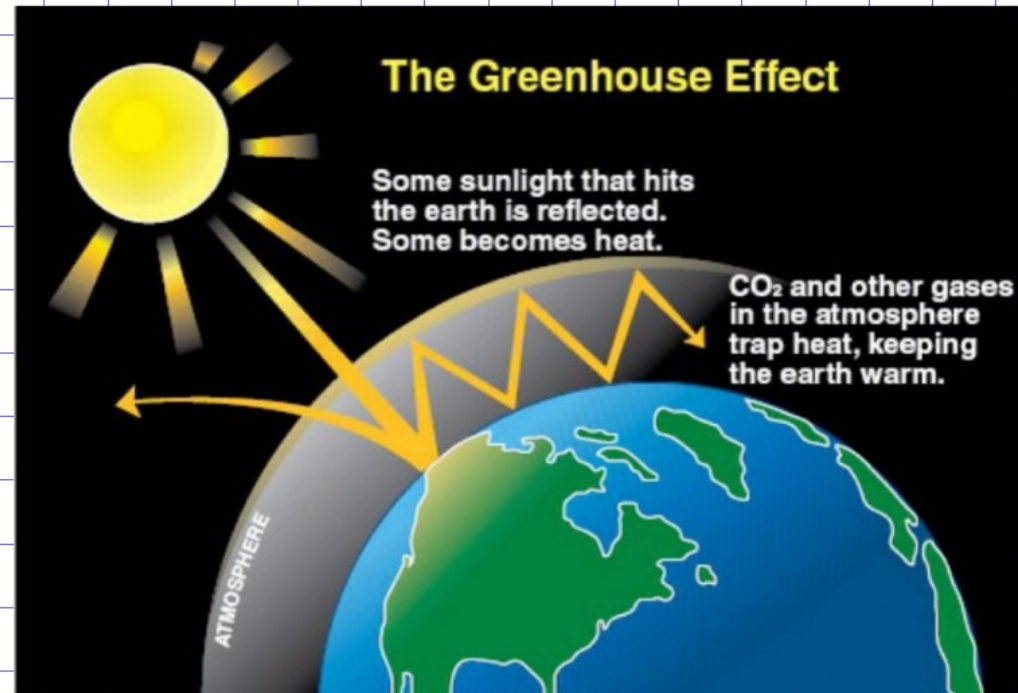
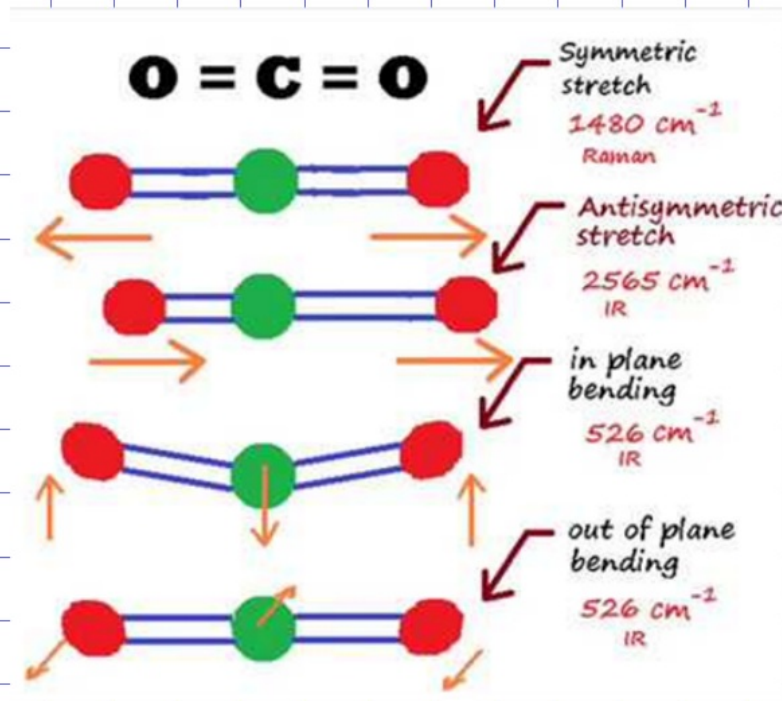


"Hoe moeten bouwkundigen rekening houden met trillingen?"

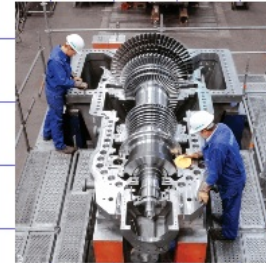
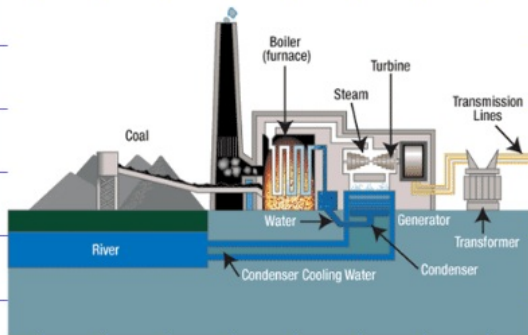


Gestemde Massademper

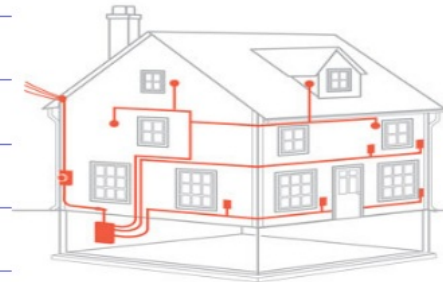
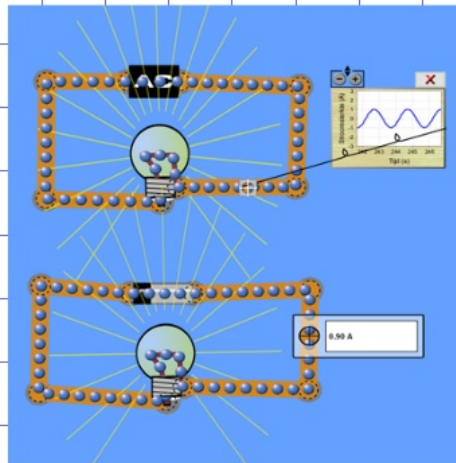
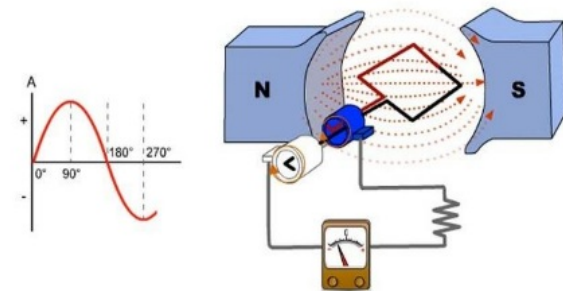
"Hoe zijn trillingen op atomaire schaal belangrijk?"



"Hoe spelen trillingen in de elektriciteitsvoorziening een rol?"



Generation of Alternating Current



"Met welk ritme moet je duwen om de schommel steeds hoger te laten gaan?"



Extreme swinging (YT)

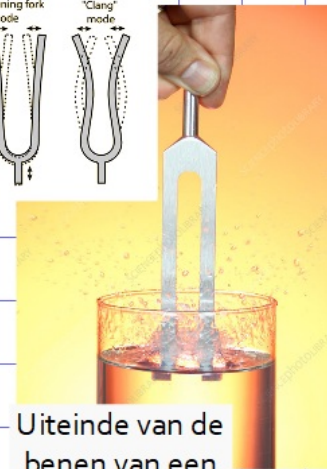
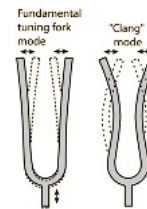
"Welke trillingen zijn harmonisch en welke niet?"



Slinger over een kleine hoek: **wel**



Zachtjes veren op een duikplank: **wel**



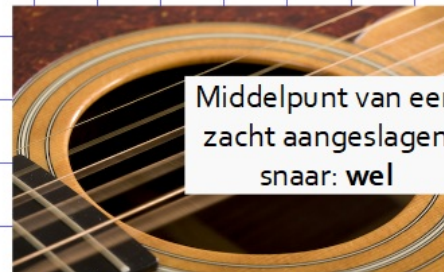
Uiteinde van de benen van een stemvork: **wel**



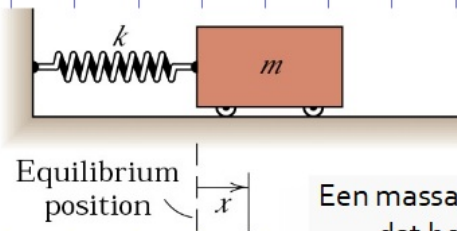
Springen op een trampoline waarbij je loskomt: **niet**



Een pakketje dat door een tunnel door de aarde heen valt: **wel**

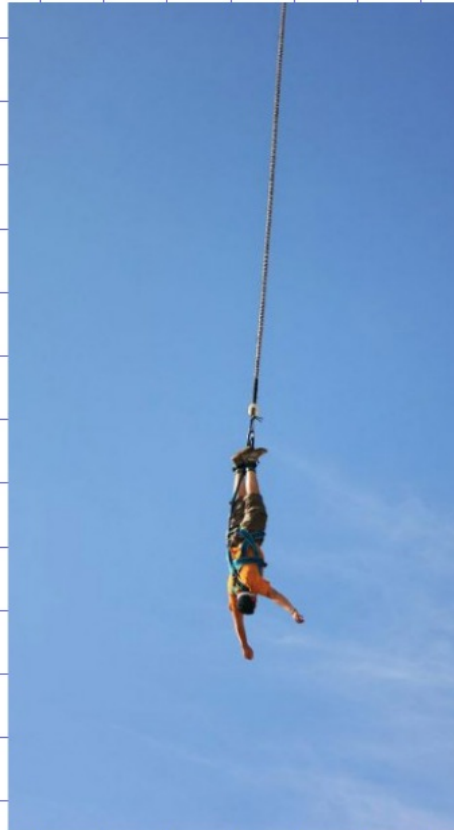
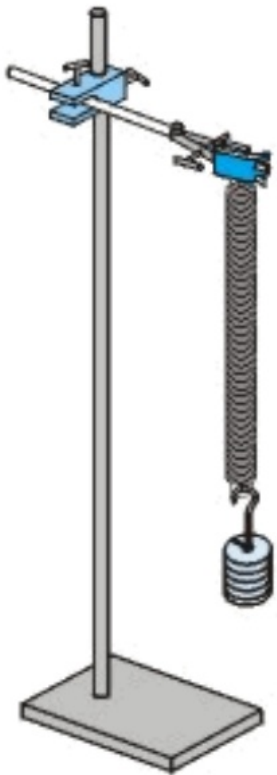


Middelpunt van een zacht aangeslagen snaar: **wel**



Een massa-veersysteem dat horizontaal geïntendeerd is: **wel**

"Wat wordt verstaan onder een veer-massasysteem?"



Carbon dioxide

"Wat voor examenvragen over trillingen kun je verwachten?"

Protonenweegschaal?

Onderzoekers beweren dat ze een 'weegschaal' hebben ontwikkeld, die een enkel proton kan wegen. De weegschaal bestaat uit een nanobuisje dat aan twee zijden is vastgeklemd en trilt als een staande golf.

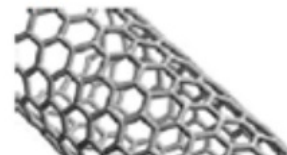
Zie figuur 1. Deze figuur is niet op schaal. Als een deeltje aan het buisje vasthecht, verandert de trillingstijd. Hieruit is de massa van dat deeltje te bepalen.

Het nanobuisje is opgebouwd uit koolstofatomen die in een honingraatstructuur zijn geordend. Zie figuur 2. De massa van het vastgeklemd nanobuisje bedraagt $6,2 \cdot 10^{-22}$ kg.

figuur 1



figuur 2

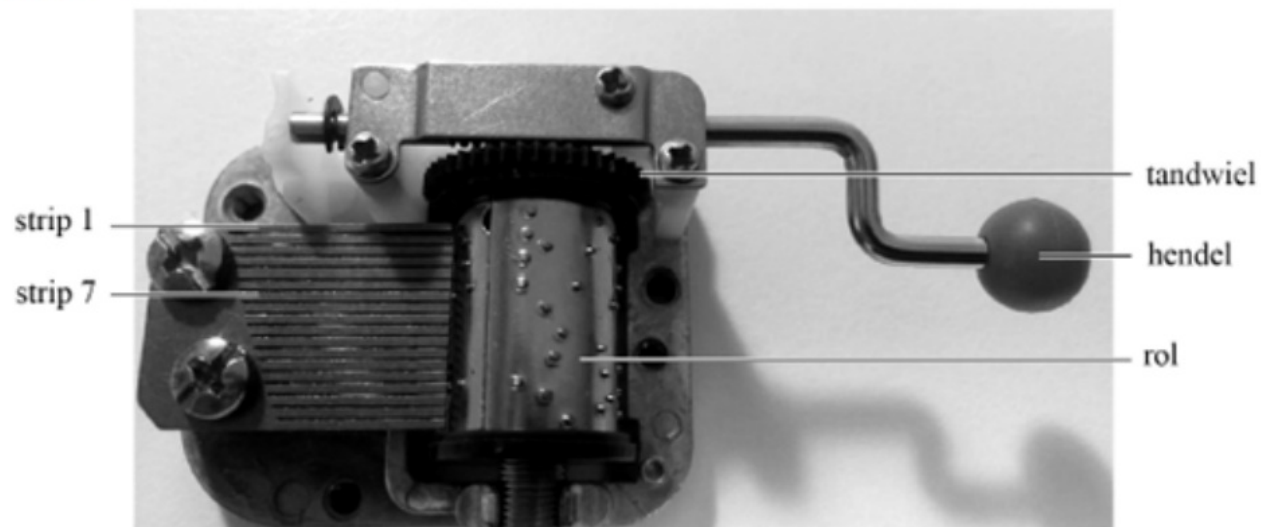


"Wat voor examenvragen over trillingen kun je verwachten?"

Speeldoosje

In figuur 1 staat een speeldoosje weergegeven.

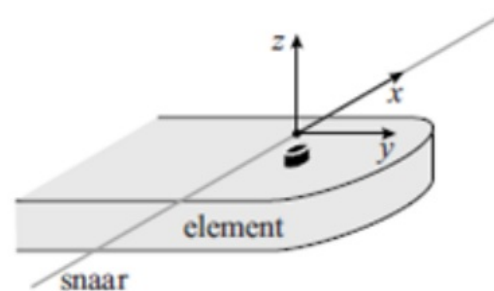
figuur 1



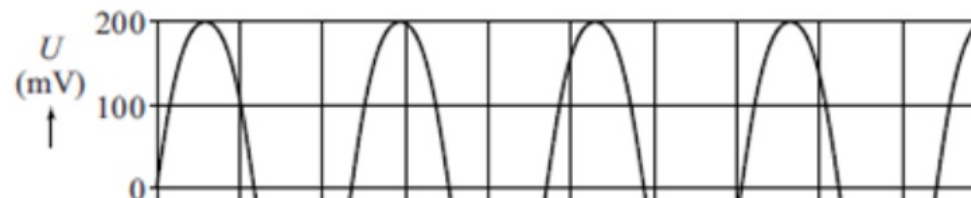
"Wat voor examenvragen over trillingen kun je verwachten?"

Een snaar kan in twee richtingen gaan trillen als deze wordt aangeslagen: een richting evenwijdig aan het element (de y -richting) en een richting loodrecht op het element (de z -richting). Zie figuur 4. Luc bouwt een opstelling waarmee hij een snaar kan laten trillen in alleen de z -richting of alleen de y -richting. Allereerst laat hij de E-snaar alleen in de z -richting trillen en meet hij de spanning die het element levert. Het resultaat van de meting in de z -richting is weergegeven in figuur 5.

figuur 4



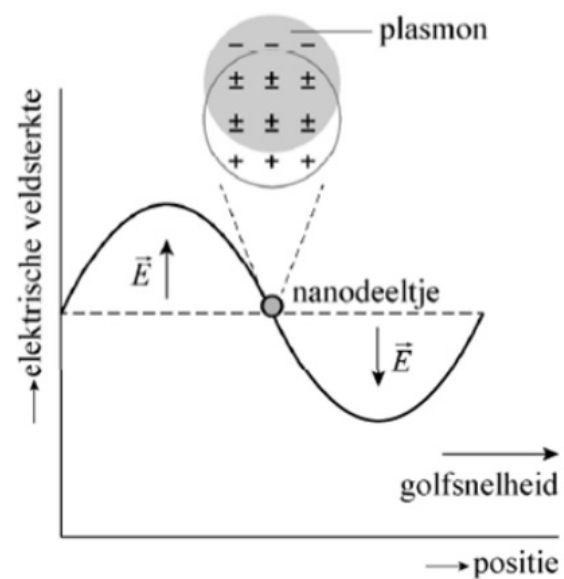
figuur 5



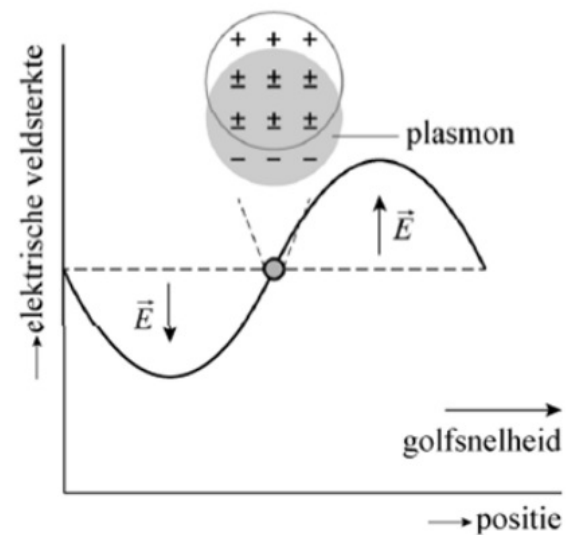
"Wat voor examenvragen over trillingen kun je verwachten?"

figuur 3

tijdstip t_1



tijdstip t_2



5p 8 Voer de volgende opdrachten uit:

"Hoe kun je de snelheid van een harmonische trilling uitrekenen?"

$$u(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$v(t) = u'(t) = A \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}_{\text{wordt maximaal 1}} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$v_{\text{max}} = 2\pi \cdot \frac{A}{T}$$



"Hoe ontstaat een harmonische trilling uit de veerkracht?"

$$u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

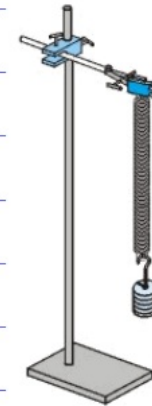
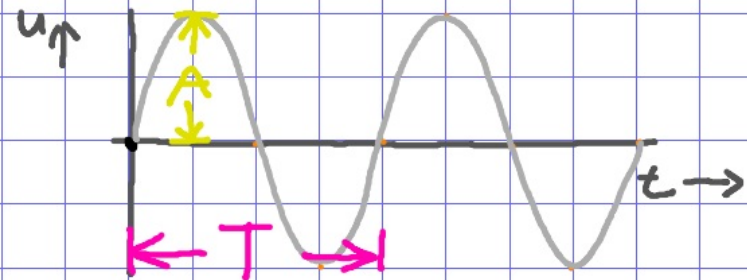
$$v = u' = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2\pi}{T}$$

$$a = u'' = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

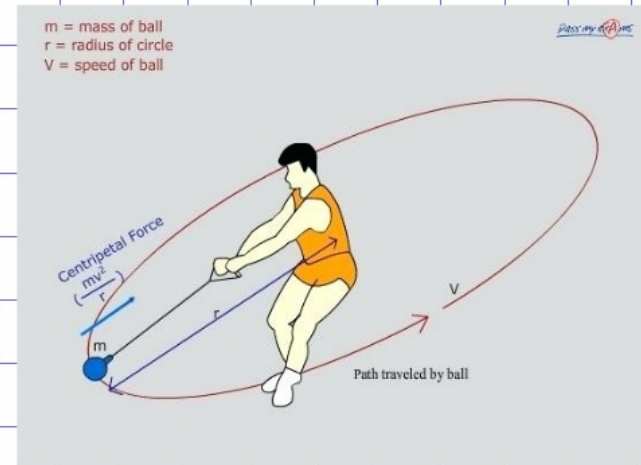
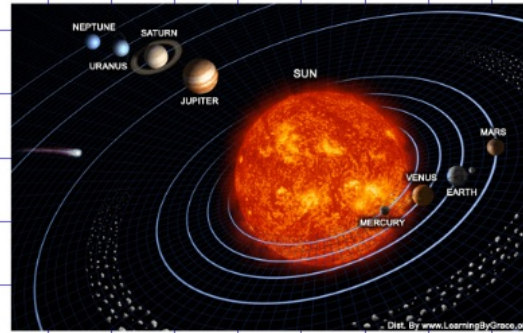
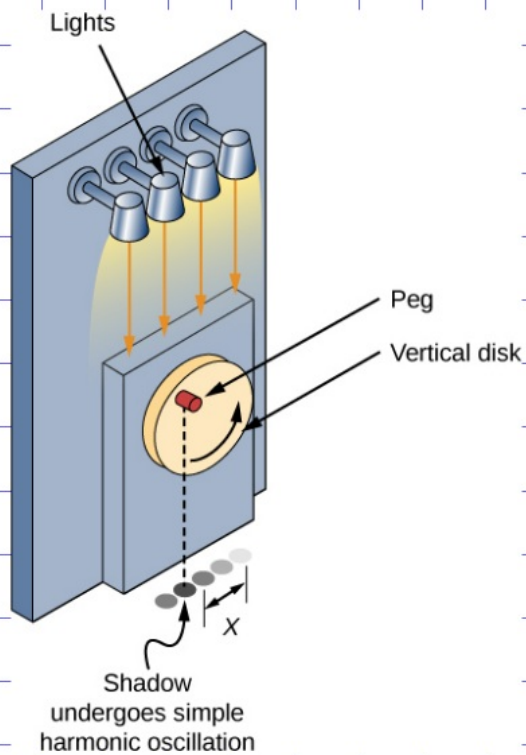
$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ F &= m \cdot a \end{aligned}$$

$$F = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

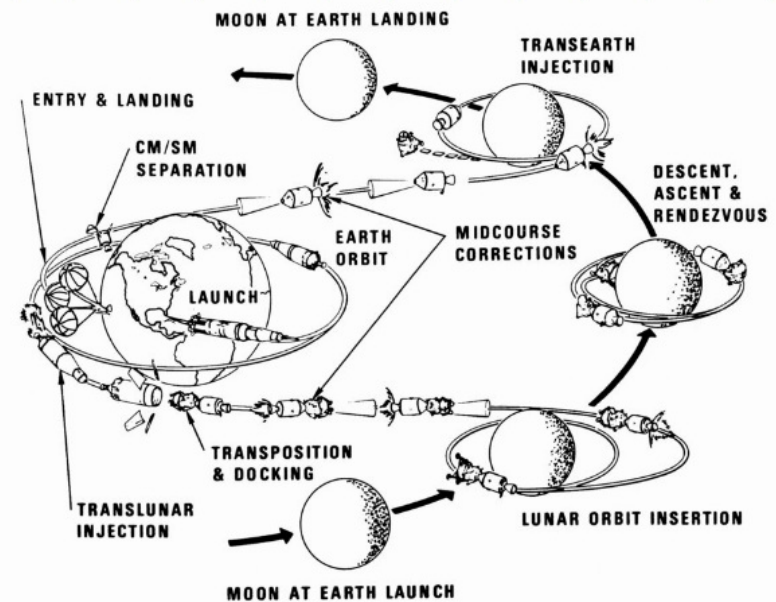
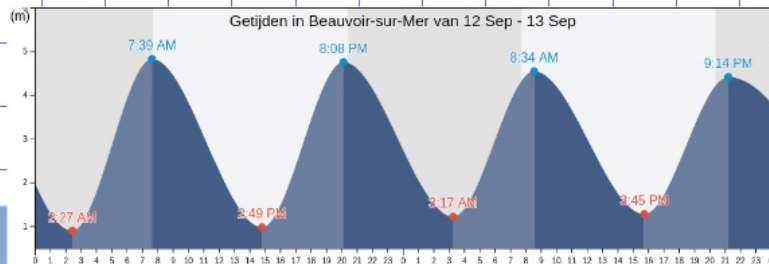
$$F = -C \cdot u$$



"Wat hebben harmonische trillingen en cirkelbewegingen met elkaar te maken?"



"Voor welke verschijnselen is fase een belangrijk begrip?"



"Waarom klinken verschillende typen instrumenten anders als ze toch dezelfde toon spelen?"

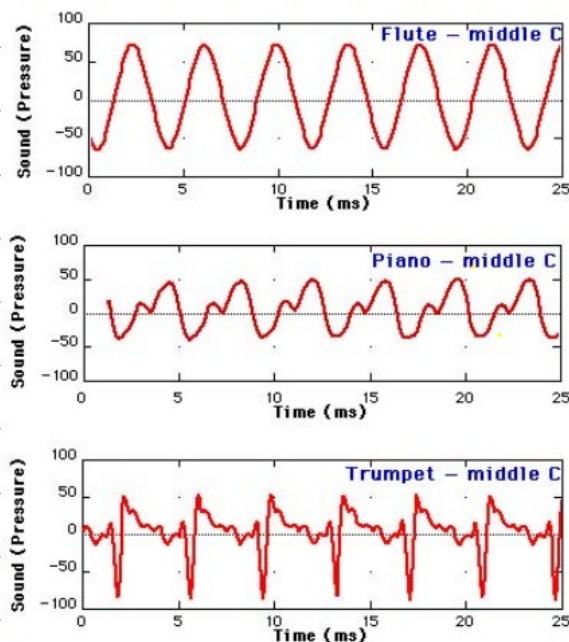
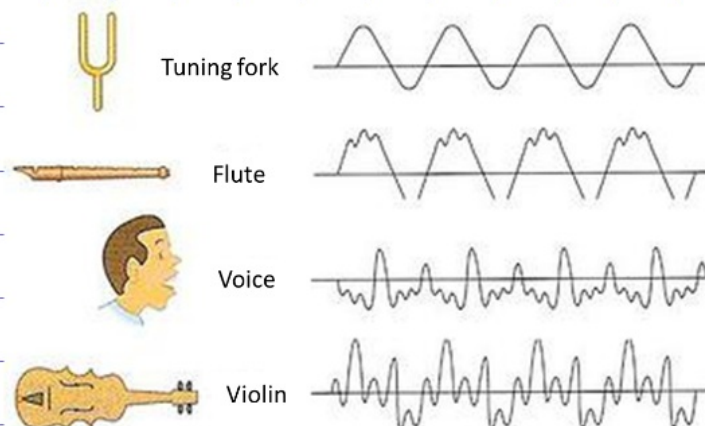


Figure 12.10 Middle C has the same fundamental frequency when played on different instruments. However the collection overtones or harmonics is different for different instruments these provide the quality, timbre, or voice that makes instruments distinct.



Hoofdstuk 8 Trillingen

- ***BONUSVRAGEN*** -

Hier staan de bonusvragen bij dit hoofdstuk. Deze vragen zijn bedoeld om je te laten nadenken over wat je geleerd hebt. Soms moet je kennis reproduceren of een geoefende techniek laten zien. Ook zitten hier inzichtvragen tussen waarvoor je geleerde kennis op een nieuwe en creatieve manier moet toepassen. Deze vragen zijn zeer nuttig om voor een proefwerk nog een keer langs te lopen!

"Tekst bonusvraag hier."

- BONUSVRAAG! -

Hoofdstuk 8 Trillingen

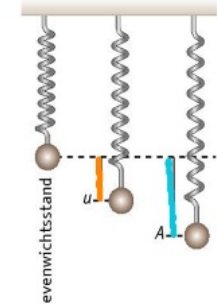
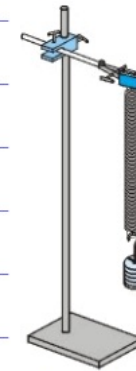
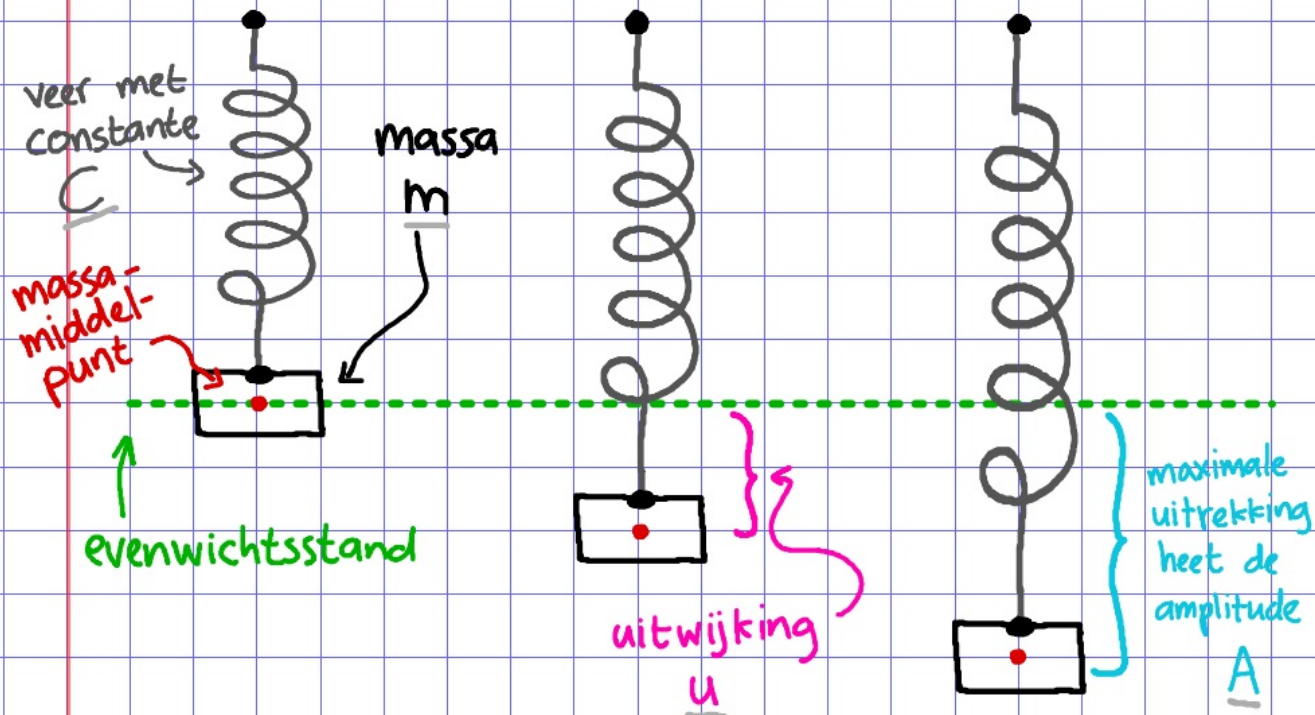
- UITLEG & AANTEKENINGEN -

De volgende dia's zijn de aantekeningen die je in de les overgenomen hebt. Alles wat hier tussen de rode lijnen staat zou ook in je schrift moeten staan. Dit is de essentiële stof voor het proefwerk en deze moet je proberen volledig te begrijpen. Je vindt hier ook de tekst bij de bordoefeningen waarvan je als het goed is alleen de uitwerkingen hebt opgeschreven.

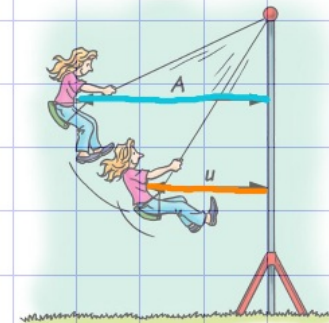
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

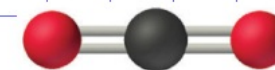
1. Aan de **trilling** van een **massa-veersysteem** zijn deze begrippen relevant:



▲ **Figuur 8.7** Uitwijking en amplitude bij een veer



▲ **Figuur 8.6** Uitwijking en amplitude bij een slinger



Carbon dioxide

Animatie Massa-veersysteem (PhET)



1 (vervolg). Afhankelijk van de **massa m** en de **veerconstante C** zal het veer-massasysteem gaan oscilleren met een vaste **frequentie**.

Het aantal trillingen per seconde heet **frequentie (f)** met eenheid **Hertz (Hz)**.

Voorbeeld: stemvork "A"
trilt 440 x per seconde:

$$f_A = 440 \text{ Hz}$$

De tijd die 1 trilling (heen-en-weer) duurt heet **trillingstijd** of **periode**.

Omrekenen
tussen trillingstijd
en frequentie:

$$(in \text{ s}) \rightarrow T = \frac{1}{f} \leftarrow (in \text{ Hz})$$

Voorbeeld, reken uit wat T_A is:

$$T_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{440 \text{ Hz}} = 0,00227 \text{ s} = 2,27 \cdot 10^{-3}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

Bordoeffening 1: Reken de frequentie uit als de trillingstijd 16 ms is.

Bordoeffening 2: De conus van een luid-spreker trilt $3,2 \times 10^4$ keer per 8,0 seconden. Welke frequentie brengt de luidspreker voort?



Bordoeffening 3: Een cirkelzaag heeft 24 tanden en draait met $1,8 \times 10^3$ omwenteling-en per minuut. Welke toonhoogte brengt de zaag voort?

Hint: hoeveel tanden gaan er per seconde door het hout?



[audiogram \(online\)](#)

$$1 \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,016 \text{ s}} = 63 \text{ Hz}$$

$$2 \quad \frac{\text{totaal aantal trillingen}}{\text{totaal aantal seconden}} = \text{trillingen/s} \quad \frac{3,2 \cdot 10^4}{8,0} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$3 \quad 1,8 \cdot 10^3 \frac{\text{omw}}{\text{min}} = 30 \frac{\text{omw}}{\text{s}} \quad (\text{delen door } 60)$$

$$30 \frac{\text{omw}}{\text{s}} \times 24 \frac{\text{tanden}}{\text{omw}} = 720 \frac{\text{tanden}}{\text{s}} = 720 \text{ Hz}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

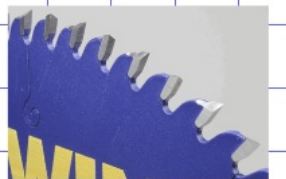
§ 8.1 Trillingen

Bordoefening 1: Reken de frequentie uit als de trillingsduur 16 ms is.

Bordoefening 2: De conus van een luidspreker trilt $3,2 \times 10^4$ keer per 8,0 seconden. Welke frequentie brengt de luidspreker voort?



Bordoefening 3: Een cirkelzaag heeft 24 tanden en draait met $1,8 \times 10^3$ omwentelingen per minuut. Welke frequentie brengt de zaag voort?



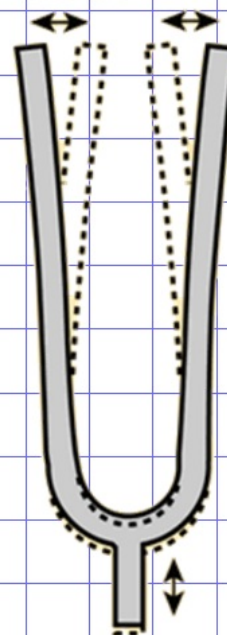
Intermezzo: Hoe kun je een trilling tekenen?



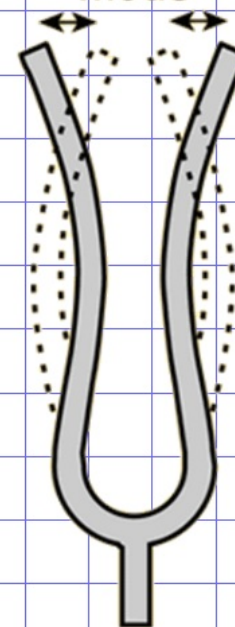
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

Fundamental
tuning fork
mode



"Clang"
mode



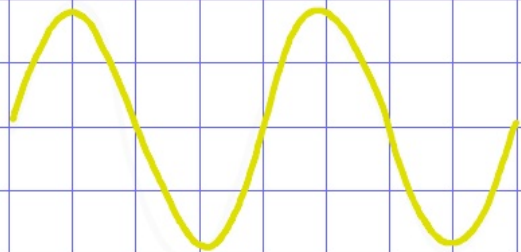
Denkcoëfening: Hoe zouden de sporen van onderstaande trillingen er uit kunnen zien?



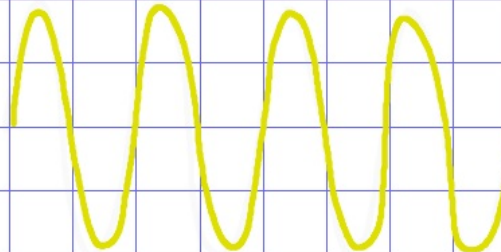
zachte, lage toon



zachte, hoge toon



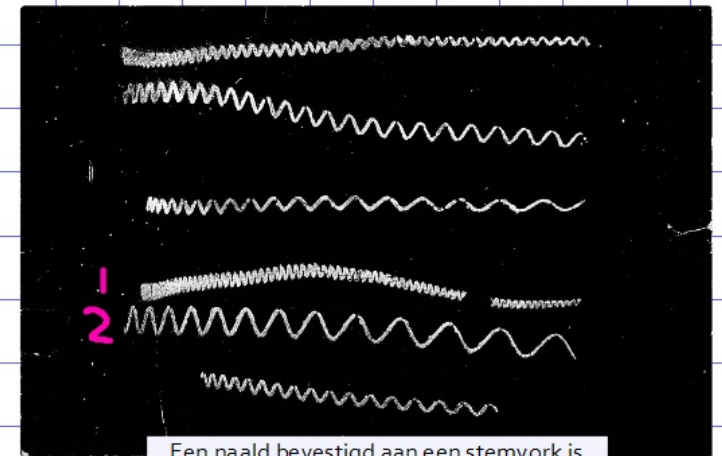
harde, lage toon



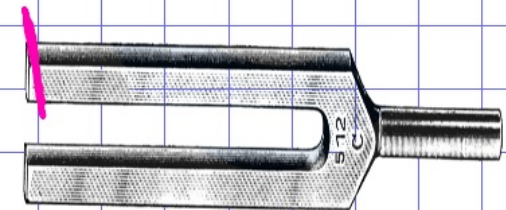
harde, hoge toon

Hoofdstuk 8: Trillingen

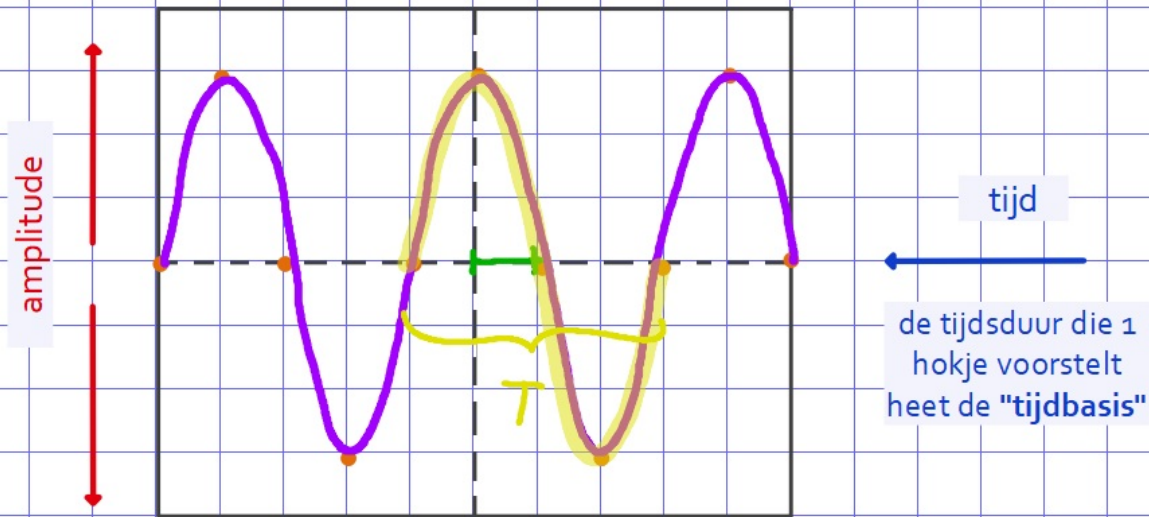
§ 8.1 Trillingen



Een naald bevestigd aan een stemvork is over een glazen plaatje met roet getrokken. De naald trekt dit soort sporen in het roet.



2. Met een **oscilloscoop** kun je de trillingstijd meten.



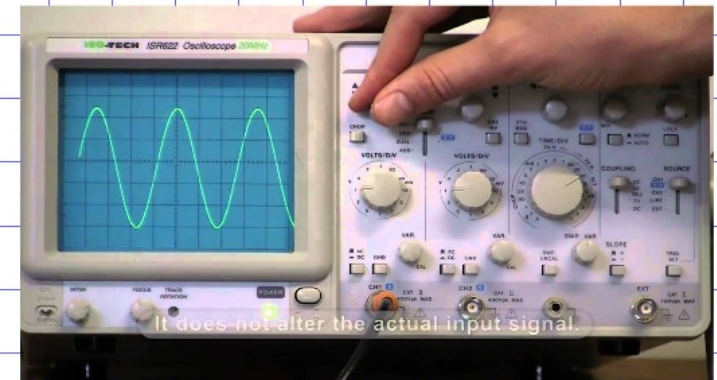
Voorbeeld: stel, de tijdbasis is 0,0002 s. Reken de trillingstijd en frequentie van deze toon uit.

$$T = 4 \times 0,00020 \text{ s} = 0,00080 \text{ s}$$

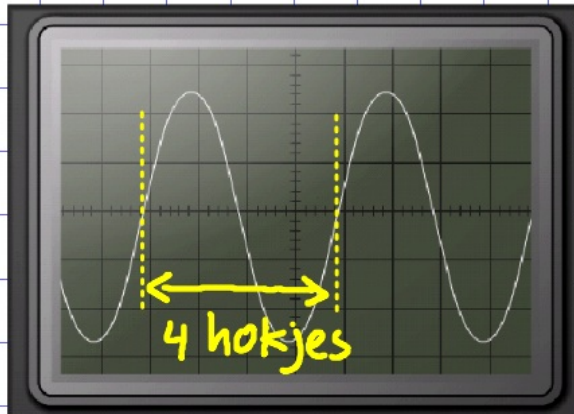
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,0008} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen



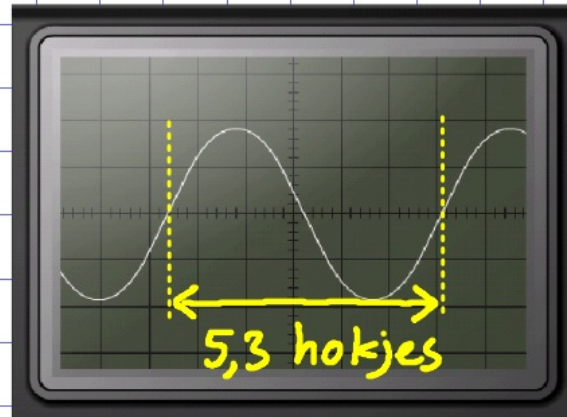
Bordoeffening 4a: Deze oscilloscoop stond afgesteld op een tijdbasis van 0,001 s. Wat zijn hier de trillingstijd en de frequentie?



$$T = 4 \cdot 0,001 \text{ s} \\ = 0,004 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,004 \text{ s}} \\ = 250 \text{ Hz}$$

Bordoeffening 4b: Deze oscilloscoop stond afgesteld op een tijdbasis van 0,05 ms. Wat zijn hier de trillingstijd en de frequentie?



$$T = 5,3 \cdot 0,00005 \text{ s} \\ = 0,000265 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,000265 \text{ s}} \\ = 3774 \text{ Hz}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

1. Zoek een trilling in de figuur
2. Tel het aantal hokjes dat de trilling duurt.
3. Reken uit dit aantal en de tijdbasis T uit.
4. Reken f uit.

Bordoeffening 5: Bekijk onderstaand oscillogram.
Lees de trillingstijd af en bereken de frequentie.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

LET OP: Je krijgt extra punten op je examen als je de trillingstijd bepaalt door meerdere perioden te nemen!

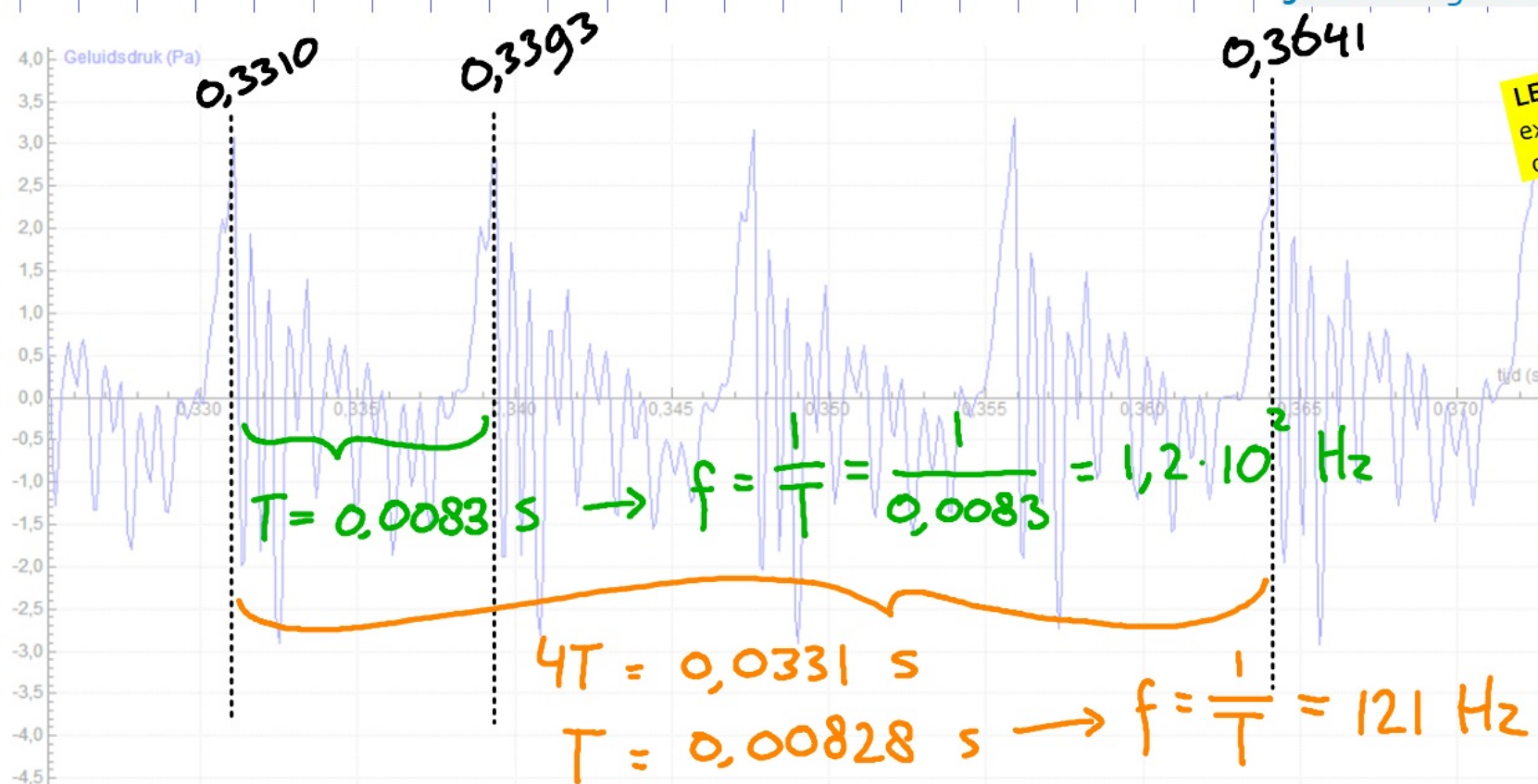


Bord oefening 6: Bekijk onderstaand oscillogram.
Lees de trillingstijd af en bereken de frequentie.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

LET OP: Je krijgt extra punten op je examen als je de trillingstijd bepaalt door meerdere perioden te nemen!



Hoofdstuk 8: Trillingen

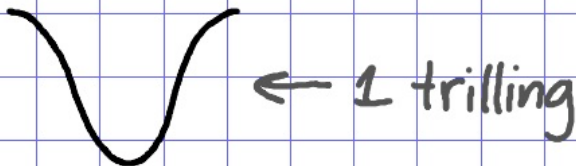
§ 8.1 Trillingen

Opdrachten

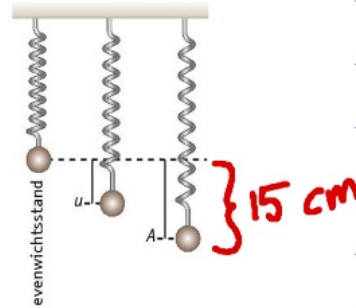
- 1 Zoek de polsslag van je buurman/vrouw op met je vingers (niet met je duim).
 - a Meet het aantal polsslagen per minuut.
 - b Bereken de trillingstijd van deze trilling.
- 2 Bij fitness worden trilapparaten gebruikt om spieren te trainen. Bereken de frequentie van een trilapparaat met een trillingstijd van 25 ms (milliseconde).
- 3 Zie figuur 8.7. De kogel trilt met een amplitude van 15 cm en een frequentie van 2,0 Hz. Bereken de afstand die de bal aflegt in één minuut.
- 4 Een trein rijdt met een snelheid van 126 km/h. Je hoort in de trein 84 keer per minuut het tikken van de wielen als ze overgaan op het volgende stuk rails.
 - a Bereken de frequentie van het tikken.
 - b Bereken de lengte van één stuk rails.
 - c Leg uit of het hier om een trilling gaat.

③ $f = 2,0 \text{ Hz}$

tijdens een trilling
legt de kogel $4 \times 15 \text{ cm}$

af, want:  ← 1 trilling

dus $s = (4 \times 15 \text{ cm}) \cdot 2,0 \cdot 60 \text{ s} = 72 \text{ m}$



▲ Figuur 8.7 Uitwijking en amplitude bij een veer

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

Opdrachten

- 1 Zoek de polsslag van je buurman/vrouw op met je vingers (niet met je duim).
a Meet het aantal polsslagen per minuut.
b Bereken de trillingstijd van deze trilling.
- 2 Bij fitness worden trilapparaten gebruikt om spieren te trainen. Bereken de frequentie van een trilapparaat met een trillingstijd van 25 ms (milliseconde).
- 3 Zie figuur 8.7. De kogel trilt met een amplitude van 15 cm en een frequentie van 2,0 Hz. Bereken de afstand die de bal aflegt in één minuut.
- 4 Een trein rijdt met een snelheid van 126 km/h. Je hoort in de trein 84 keer per minuut het tikken van de wielen als ze overgaan op het volgende stuk rails.
a Bereken de frequentie van het tikken.
b Bereken de lengte van één stuk rails.
c Leg uit of het hier om een trilling gaat.

④ a) $84/\text{min} = 1,4/\text{s}$ dus $f = 1,4 \text{ Hz}$

b) $126 \text{ km/h} = 35,0 \text{ m/s}$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1,4 \text{ Hz}} = 0,71 \text{ s}$$

$$s = v \cdot \Delta t = 35,0 \text{ m/s} \cdot 0,71 \text{ s} = 25 \text{ m}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

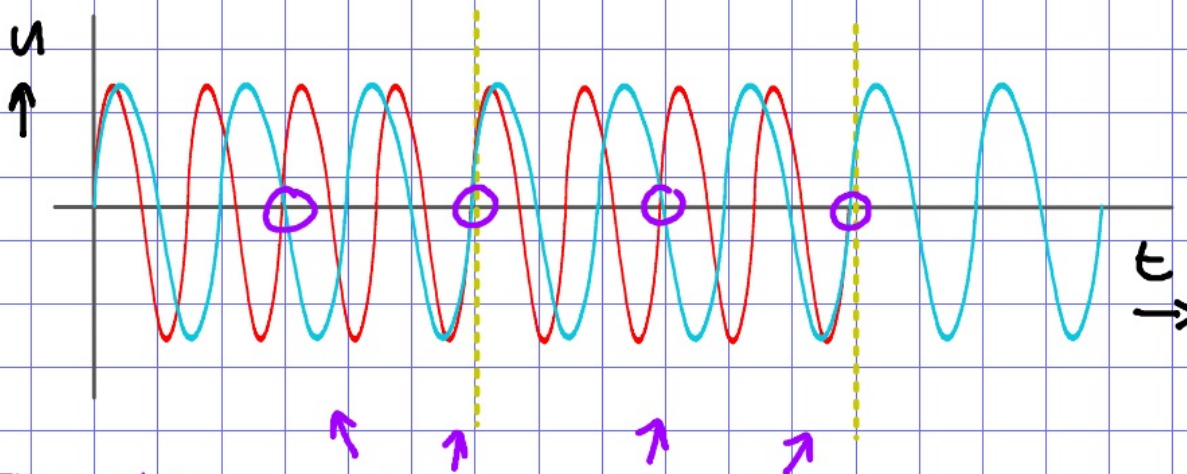
Opdrachten

- 1 Zoek de polsslag van je buurman/vrouw op met je vingers (niet met je duim).
 - a Meet het aantal polsslagen per minuut.
 - b Bereken de trillingstijd van deze trilling.
- 2 Bij fitness worden trilapparaten gebruikt om spieren te trainen. Bereken de frequentie van een trilapparaat met een trillingstijd van 25 ms (milliseconde).
- 3 Zie figuur 8.7. De kogel trilt met een amplitude van 15 cm en een frequentie van 2,0 Hz. Bereken de afstand die de bal aflegt in één minuut.
- 4 Een trein rijdt met een snelheid van 126 km/h. Je hoort in de trein 84 keer per minuut het tikken van de wielen als ze overgaan op het volgende stuk rails.
 - a Bereken de frequentie van het tikken.
 - b Bereken de lengte van één stuk rails.
 - c Leg uit of het hier om een trilling gaat.

5

$$A: 1,67 \text{ Hz} \cdot 60 \text{ s} = 100 \text{ keer op en naar}$$

$$B: 1,25 \text{ Hz} \cdot 60 \text{ s} = 75 \text{ keer op en naar}$$



a) Elke 2 trillingen van blokje A, dus 50 keer per minuut

b) Elke 4 trillingen van blokje A, dus 25 keer per minuut

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

Opdrachten

- 5 Twee blokjes worden elk aan een veer gehangen en in trilling gebracht. Het ene blokje heeft een frequentie van 1,67 Hz en het andere blokje een frequentie van 1,25 Hz. Op een gegeven moment gaan de blokjes tegelijkertijd omhoog door de evenwichtsstand.
- Bereken hoe vaak per minuut de blokjes tegelijkertijd door de evenwichtsstand gaan.
 - Bereken hoe vaak per minuut de blokjes tegelijkertijd omhoog door de evenwichtsstand gaan.

⑥ a. $T = (2,8 + 1,6) \text{ div} = 4,4 \text{ div}$
 $= 4,4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 11 \cdot 10^{-6} \text{ s}$
 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{11 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 9,1 \cdot 10^4 \text{ Hz} \leftarrow$

b. $T = 11 \cdot 10^{-6} \text{ s} \hat{=} 10 \text{ div} \rightarrow 1 \text{ div} \hat{=} 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1,1 \mu\text{s}$

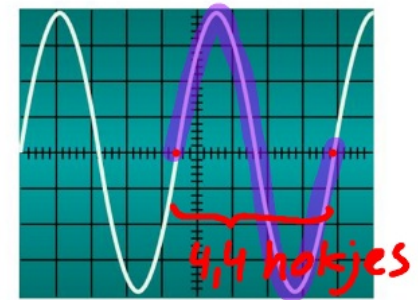
c. $T = 10 \text{ div} \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ s/div} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$
 $f = \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}} = 4,0 \cdot 10^4 \text{ Hz} \leftarrow$

$\hat{=}$ betekent: "komt overeen met"

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

- 6 De instelling van de oscilloscoop in figuur 8.10 is $2,5 \mu\text{s/div}$ horizontaal en $2,5 \text{ mV/div}$ verticaal.



John Stoel, Haren

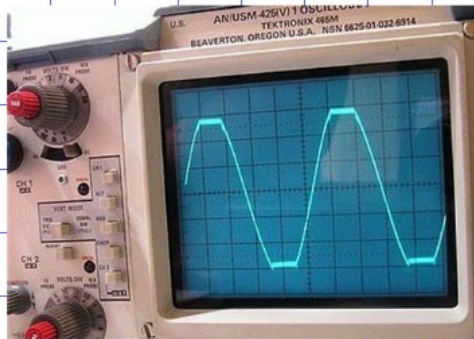
▲ Figuur 8.10

- Bepaal uit de grafiek op het scherm de frequentie en amplitude van de trilling.
- Bereken de instelling waarbij precies één periode op het scherm zichtbaar is.
- Bereken de frequentie van het signaal dat bij de oorspronkelijke instelling precies één periode op het scherm te zien geeft.

7a. $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

b. $10 \text{ hokjes} \hat{=} 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ dus
 $1 \text{ hokje} \hat{=} 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

c.



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

- 7 Een treinconducteur blaast op een fluitje met een frequentie van 1,0 kHz.
- Bereken de trillingstijd van deze trilling.
 - Je vangt het geluid op met een microfoon die op een oscilloscoop is aangesloten. De oscilloscoop heeft horizontaal 10 hokjes. Welke tijdschaal moet je instellen om twee trillingen op het scherm te zien?
 - Als de conducteur je ziet, fluit hij nog harder, zodat de trilling niet meer op het scherm van de oscilloscoop past. Wat moet je doen aan de instelling van de oscilloscoop om het signaal weer passend te maken?

9b. 3 pulsen : $3 \cdot T = (9,85 - 8,24) = 1,61 \text{ s}$
 $T = 0,537 \text{ s}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,537 \text{ s}} = 1,86 \text{ Hz}$$

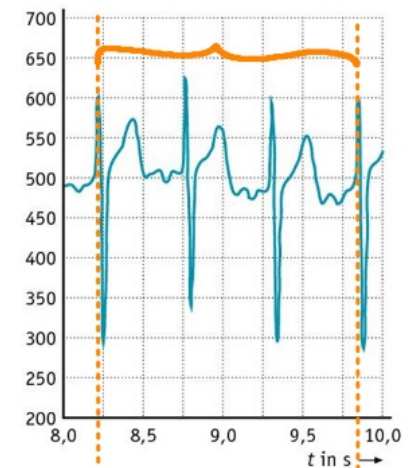
$$60 \times 1,86 = 112 \text{ slagen/min}$$

$$= 112 \text{ slagen} \cdot \text{min}^{-1}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.1 Trillingen

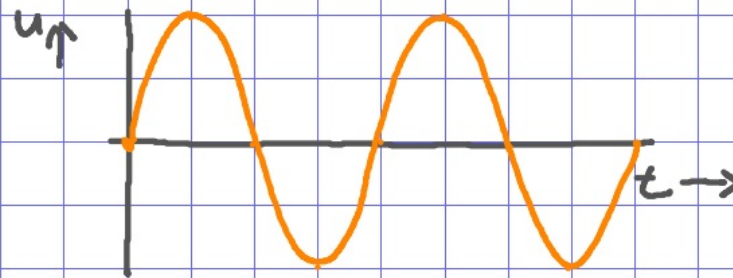
- 8 Lees bron 3. Zou de spraakherkenningssoftware jouw spraak herkennen aan de amplitude van de trilling? Leg uit.
- 9 In figuur 8.11 zie je een cardiogram.
- Wat voor grootte staat er waarschijnlijk op de verticale as?
 - Bereken het aantal hartslagen van de patiënt per minuut.



▲ Figuur 8.11 Cardiogram

§ 8.2 Trilling en kracht

4. Als een systeem een **harmonische trilling** uitvoert is de u/t -grafiek een **sinusoïde**:



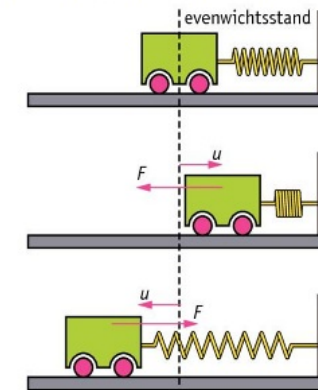
Een harmonische trilling ontstaat als de situatie aan deze voorwaarden voldoet:

1. Kracht is **tegengesteld** aan de uitwijking
2. Tussen de kracht en de uitrekking is een **lineair** verband.

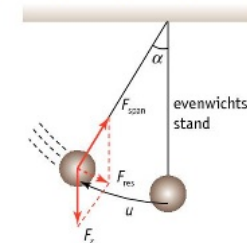
$$F = - C \cdot u$$

veer-kracht (N) $\rightarrow F = C \cdot u \leftarrow$ uitrekking (m)
 $\uparrow$
 (N/m)

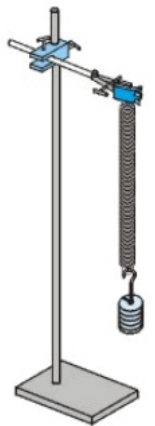
Hoofdstuk 8: Trillingen



▲ Figuur 8.15



▲ Figuur 8.16 Een slinger



Mass-Spring System (PhET)

Bordoeffening 4

a. $F_z = m \cdot g = 0,100 \text{ kg} \cdot 9,81 = 0,981 \text{ N}$
 $C = \frac{F}{u} = \frac{0,981 \text{ N}}{0,065 \text{ m}} = 15 \text{ N/m}$

b. $u = L - L_0 = 11,8 - 7,9 = 3,9 \text{ cm} = 0,039 \text{ m}$
 $C = \frac{F}{u} = \frac{0,981 \text{ N}}{0,039 \text{ m}} = 25 \text{ N/m}$

c. dunne veer: $u = \frac{F}{C} = \frac{2,45 \text{ N}}{15 \text{ N/m}} = 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}$

dikke veer: $u = \frac{F}{C} = \frac{2,45 \text{ N}}{25 \text{ N/m}} = 0,098 = 9,8 \text{ cm}$

$250 \text{ g} \leftrightarrow 2,45 \text{ N}$



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

Bordoeffening 4:

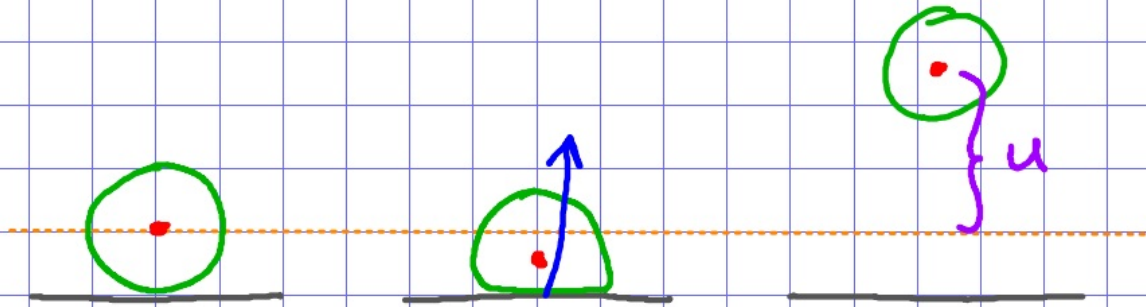
a. Bepaal de veerconstante van de dunne veer. Deze veer rekt 6,5 cm uit bij een belasting met twee gewichtjes van 50 g. Geef C in N/m.

b. Bepaal de veerconstante van de dikke veer. Deze veer heeft een rustlengte $L_0 = 7,9 \text{ cm}$. Bij belasting met 100 g wordt de lengte 11,8 cm. Geef C in N/m.

c. Bereken van beide veren de uitrekking als er 250 gram aan de veren hangt.

veer-kracht (N) $\rightarrow F = C \cdot u \leftarrow$ uitrekking (m)
 $\uparrow$
 (N/m)

10



11 a. $C = \frac{F}{u} = \frac{24 \text{ N}}{0,040 \text{ m}} = 6,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$

$C = \frac{F}{u} = \frac{24 \text{ N}}{4,0 \text{ cm}} = 6,0 \text{ N/cm}$

b. $u = \frac{F}{C} = \frac{33 \text{ N}}{6,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}} = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

10 Een bal valt op een betonnen vloer. De bal stuit en komt weer op zijn oorspronkelijke hoogte. Dit gaat eendeloos door. Is er hier sprake van een harmonische trilling? Leg uit.

11 Je trekt met een krachtmeter aan een veer en meet de uitrekking. De uitrekking is 4,0 cm als de krachtmeter 24 N aangeeft.

a Bereken de veerconstante van deze veer in N/cm en N/m.

b Bereken hoe ver deze veer uitrekt als je er met een kracht van 33 N aan trekt.

$y = x^2$

$y = \sin x$

12

$$u = L - L_0 = 15,0 \text{ cm} - 12,0 \text{ cm} = 3,0 \text{ cm} \\ = 0,030 \text{ m}$$

$$F = C \cdot u = 50 \text{ N/m} \cdot 0,030 \text{ m} \\ = 1,50 \text{ N}$$

$$m = \frac{F_z}{g} = \frac{1,50 \text{ N}}{9,81} = 0,15 \text{ kg}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

12 Je hangt een blokje aan een veer met een lengte van 12,0 cm. De veer heeft een veerconstante van 50 N/m. De veer rekt uit en is nu 15,0 cm lang. Bereken de massa van het blokje.

- 13 Als je aan een veer een blokje hangt dan rekt de veer uit. Nu hang je onder het blokje een identieke veer, en daar hang je een identiek blokje aan. Wat kun je nu zeggen over de totale uitrekking? Je hoeft geen rekening te houden met de massa van de veer.
- A Die blijft gelijk.
 - B Die is 2x zo groot.
 - C Die is 3x zo groot.
 - D Die is 4x zo groot.

14 In figuur 8.16 zijn de krachten getekend die op een slinger werken. Voor de netto kracht geldt:

$$F_{\text{netto}} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

- a Toon dit aan.
- b Leg uit dat de slinger nu niet voldoet aan de wet van Hooke.
- c Voor een niet al te grote uitwijking geldt dat $\sin \alpha \approx \alpha$. Leg uit dat de slinger voor een niet al te grote uitwijking wel voldoet aan de wet van Hooke.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

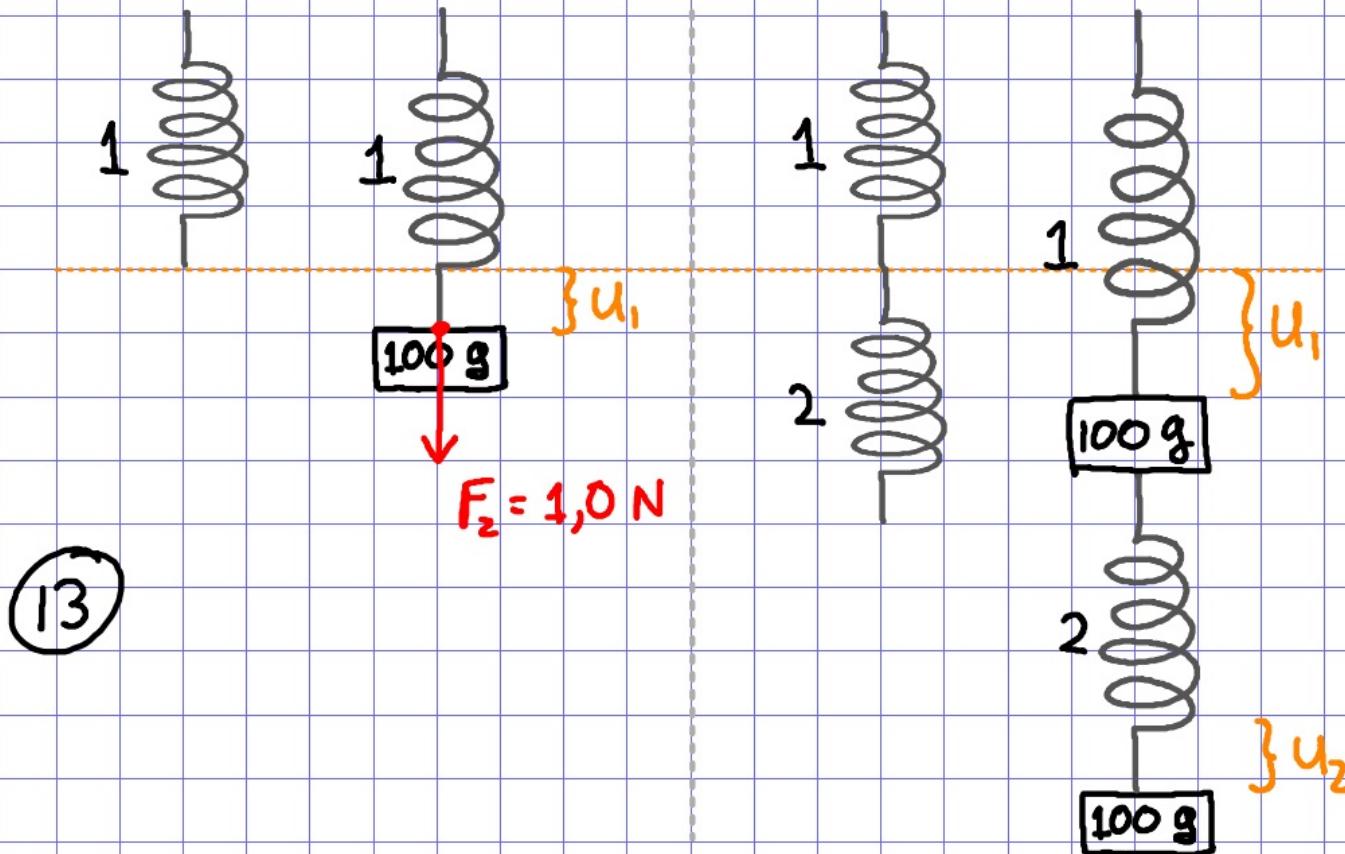
- 12 Je hangt een blokje aan een veer met een lengte van 12,0 cm. De veer heeft een veerconstante van 50 N/m. De veer rekt uit en is nu 15,0 cm lang. Bereken de massa van het blokje.

- 13 Als je aan een veer een blokje hangt dan rekt de veer uit. Nu hang je onder het blokje een identieke veer, en daar hang je een identiek blokje aan. Wat kun je nu zeggen over de totale uitrekking? Je hoeft geen rekening te houden met de massa van de veer.
- A Die blijft gelijk.
 - B Die is 2x zo groot.
 - ☒ C Die is 3x zo groot.
 - D Die is 4x zo groot.

- 14 In figuur 8.16 zijn de krachten getekend die op een slinger werken. Voor de netto kracht geldt:

$$F_{\text{netto}} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

- a Toon dit aan.
- b Leg uit dat de slinger nu niet voldoet aan de wet van Hooke.
- c Voor een niet al te grote uitwijking geldt dat $\sin \alpha \approx \alpha$. Leg uit dat de slinger voor een niet al te grote uitwijking wel voldoet aan de wet van Hooke.

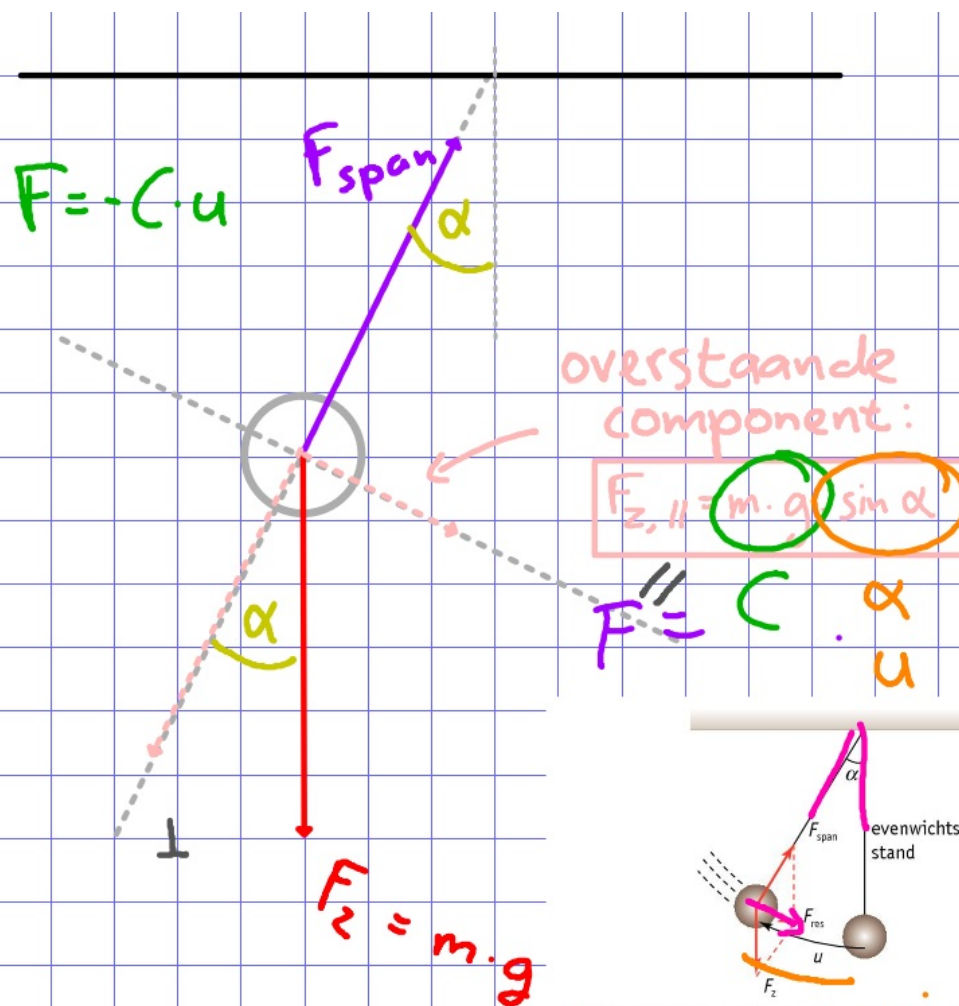


13

Let op: je gebruikt de kleine-hoeken-benadering hier twee keer:

1. De parallelle component van F_z vereenvoudigt tot $m \cdot g \cdot \alpha$.

2. De uitwijking u is eigenlijk een boogje, maar bij kleine hoeken is de booglengte gelijk aan $\sin \alpha$. Dit vereenvoudigt ook tot α .



▲ Figuur 8.16 Een slinger

$\rightarrow \sin \alpha = \alpha$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

12 Je hangt een blokje aan een veer met een lengte van 12,0 cm. De veer heeft een veerconstante van 50 N/m. De veer rekt uit en is nu 15,0 cm lang. Bereken de massa van het blokje.

- 13 Als je aan een veer een blokje hangt dan rekt de veer uit. Nu hang je onder het blokje een identieke veer, en daar hang je een identiek blokje aan. Wat kun je nu zeggen over de totale uitrekking? Je hoeft geen rekening te houden met de massa van de veer.
- A Die blijft gelijk.
 - B Die is 2x zo groot.
 - C Die is 3x zo groot.
 - D Die is 4x zo groot.

14 In figuur 8.16 zijn de krachten getekend die op een slinger werken. Voor de netto kracht geldt:

$$F_{\text{netto}} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

- a Toon dit aan.
- b Leg uit dat de slinger nu niet voldoet aan de wet van Hooke.
- c Voor een niet al te grote uitwijking geldt dat $\sin \alpha \approx \alpha$. Leg uit dat de slinger voor een niet al te grote uitwijking wel voldoet aan de wet van Hooke.

a) $F_v = 30 \text{ N}$ (je weet u en C)

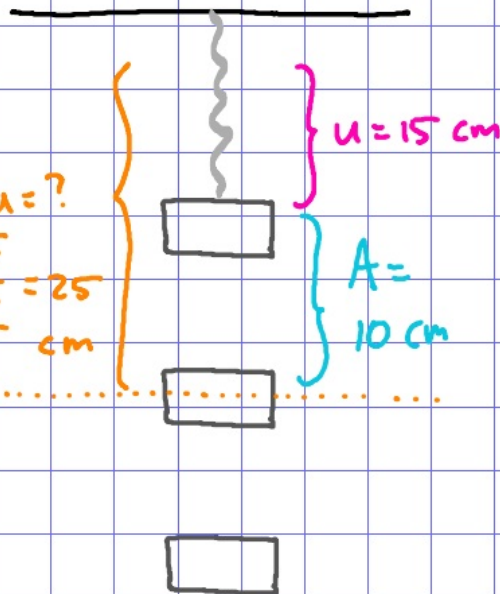
$F_{\text{hand}} = 20 \text{ N}$

$F_z = 50 \text{ N}$

b)

$$u = \frac{F}{C} = 25 \text{ cm}$$

$$u = \frac{F}{C}$$

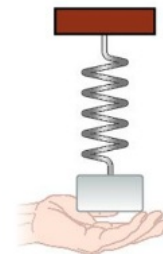


Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

15 Een blok ($m = 5,1 \text{ kg}$) hangt aan een veer. Met je hand ondersteun je het blok, zie figuur 8.17. De veer heeft een veerconstante van 200 N/m . De veer is 15 cm uitgerekt.

a Bereken de kracht F die jouw hand uitoefent op het blok.



▲ Figuur 8.17

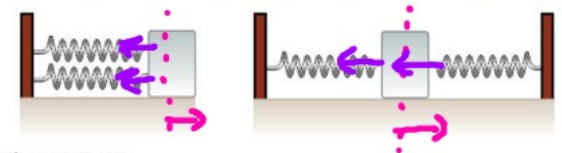
b Als je snel je hand weghaalt valt het blok naar beneden en gaat het een trilling uitvoeren met een trillingstijd T . Bereken de amplitude A van de trilling.

c Je voert het experiment nogmaals uit, maar nu ondersteun je het blok zodat de veer nog maar 10 cm is uitgerekt. Worden de waarden F , T en A groter, kleiner of blijven ze gelijk? Leg uit.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

- 16 In figuur 8.18 zie je identieke veren die aan een blok zijn bevestigd, maar op verschillende manieren. Aanvankelijk zijn de veren niet uitgerekt. De blokken worden vervolgens over dezelfde afstand naar rechts getrokken en losgelaten.



▲ Figuur 8.18

Welk blok ondervindt de grootste netto kracht?

A Het linker blok.

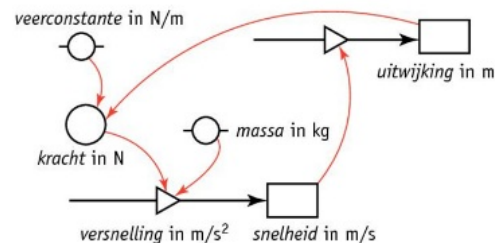
B Het rechter blok.

C De netto krachten zijn gelijk.

5. Uit de twee voorwaarden voor harmonische oscillatie is een **model** te maken:

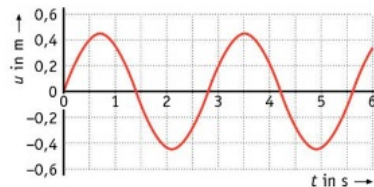
5 Model van de harmonische trilling

Een harmonische trilling is te analyseren met een computermodel, zie figuur 8.19.



▲ Figuur 8.19

De grafiek van de uitwijking als functie van de tijd staat in figuur 8.20. De (u, t) -grafiek van een harmonische trilling heeft een sinusvorm.



▲ Figuur 8.20

17 Het model in figuur 8.21 beschrijft een beweging met andere startwaarden dan het model in figuur 8.19 en 8.20. Leg uit hoe je dat kunt zien.

18 Maak in Coach het model zoals in figuur 8.19. Kies als waarde voor de veerconstante 0,5 en voor de massa 0,1. De beginwaarde van de snelheid is 0 en de beginwaarde van de uitwijking is 0,5.

a Leg uit wat de amplitude zal zijn van de beweging die ontstaat.

b Voer het model uit met als stapgrootte 0,1 s. Maak een (u, t) -grafiek. Wat zie je gebeuren?

c Verander de stapgrootte in 0,001 s en voer het model nogmaals uit. Waarom zie je nu wel een sinusvorm ontstaan?

d Verander de beginwaarde van de snelheid in 0,8. Leg uit of de waarde van de amplitude van de beweging nu verandert. Wordt de amplitude groter of kleiner?

e Voer het model uit en controleer je bewering bij d.

19 Maak in Coach het model zoals in figuur 8.21. Om een tekstueel model in te voeren klik je op 'tekstmodus' (of ctrl-t).

a Voer het model uit en bepaal uit de (u, t) -grafiek de periode van de trilling.

b Verander de startwaarde van de uitwijking in 0,25. Leg uit wat je verwachting is voor de periode van de trilling.

c Voer het model uit en controleer je voorspelling.

d Maak de massa viermaal zo groot en bepaal de periode. Wat is je conclusie?

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

modelregels	startwaarden
$F = -C \cdot u$	$t = 0$
$a = F/m$	$dt = 0,001$
$v = v + a \cdot dt$	$C = 2$
$u = u + v \cdot dt$	$m = 0,81$
$t = t + dt$	$u = 0,5$
	$v = 0$
	$a = 0$

▲ Figuur 8.21

e Maak (met dezelfde massa als in d) de veerconstante viermaal zo groot en bepaal de periode. Wat is je conclusie?

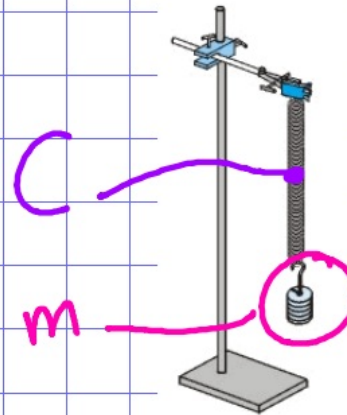
f Verander de veerkracht in de formule $F = C \cdot u$ (zonder minteken), voer het model uit en beschrijf het resultaat.

g Doe hetzelfde voor de formules $F = -C \cdot u^2$ en $F = -C\sqrt{u}$.

6. De trillingstijd van een harmonische trilling hangt af van de massa en de veerconstante:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

Let op dat de trillingstijd niet afhangt van de amplitude.



Bordoefening 4:

a. $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{0,250 \text{ kg}}{15 \text{ N/m}}} = 0,81 \text{ s}$

b. $T = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{C}} \rightarrow \frac{T}{2\pi} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{C}} \rightarrow \frac{T \cdot \sqrt{C}}{2\pi} = \sqrt{m} \rightarrow m = \frac{T^2 \cdot C}{4 \cdot \pi^2}$

$$m = \frac{(1,0 \text{ s})^2 \cdot 25 \text{ N/m}}{4 \cdot (3,14)^2} = 0,63 \text{ kg}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

Bordoefening 4:

- Reken de trillingstijd uit van een massa-veersysteem met $m = 250 \text{ g}$ en $C = 15 \text{ N/m}$.
- Bereken welke massa je aan een veer met $C = 25 \text{ N/m}$ moet hangen om een trillingstijd van $1,0 \text{ s}$ te krijgen.

wiskundige tip:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$a = \sqrt{b} \rightarrow a^2 = b$$

20
a. $C = \frac{4\pi^2 \cdot 1130 \text{ kg}}{(0,30 \text{ s})^2} = 5,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}$

c. nieuwe massa: $m = 1130 + (5 \times 75) + 60 = 1565 \text{ kg}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{1565}{5,0 \cdot 10^5}} = 0,35 \text{ s}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} \quad m = \frac{T^2 \cdot C}{4\pi^2}$$

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

- 20 Een Skoda Octavia heeft een massa van 1130 kg. Als je met deze auto over een hobbel rijdt, veert hij op en neer met een trillingstijd van 0,30 s.
- Bereken de veerconstante van het veersysteem van de auto.
 - Het veren wordt sterk gedempt door de schokdempers. Waarvoor zijn de schokdempers nodig?
 - De auto wordt volgeladen met vijf personen van gemiddeld 75 kg en 60 kg bagage. Bereken de nieuwe trillingstijd van de auto.
- 21 In de ruimte werkt een personenweegschaal niet. Toch willen de ruimtevaarders kijken of ze niet te veel aankomen of afvallen. Dat doen ze door zich vast te gespen op een stoel die op een veer gemonteerd is. Door zich ergens tegen af te zetten brengt de astronaut op de stoel zichzelf aan het trillen. De massa van de stoel is 4,0 kg en de veerconstante van de gebruikte veer is 12,6 kN/m. Bereken de massa van de astronaut als de trillingstijd 0,50 s is.

(21)

$$m = \frac{T^2 \cdot C}{4\pi^2} = \frac{(0,50)^2 \cdot 12,6 \cdot 10^3}{4 \cdot (3,14)^2} = 79,8 \text{ kg}$$

$m = 76 \text{ kg} \quad \leftarrow -4,0 \text{ kg}$



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

- 20 Een Skoda Octavia heeft een massa van 1130 kg. Als je met deze auto over een hobbel rijdt, veert hij op en neer met een trillingstijd van 0,30 s.
- a Bereken de veerconstante van het veersysteem van de auto.
 - b Het veren wordt sterk gedempt door de schokdempers. Waarvoor zijn de schokdempers nodig?
 - c De auto wordt volgeladen met vijf personen van gemiddeld 75 kg en 60 kg bagage. Bereken de nieuwe trillingstijd van de auto.
- 21 In de ruimte werkt een personenweegschaal niet. Toch willen de ruimtevaarders kijken of ze niet te veel aankomen of afvallen. Dat doen ze door zich vast te gespen op een stoel die op een veer gemonteerd is. Door zich ergens tegen af te zetten brengt de astronaut op de stoel zichzelf aan het trillen. De massa van de stoel is 4,0 kg en de veerconstante van de gebruikte veer is 12,6 kN/m. Bereken de massa van de astronaut als de trillingstijd 0,50 s is.

Klik!

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} \quad m = \frac{T^2 \cdot C}{4\pi^2} \quad C = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}$$

22

23

kleine
T

A-B-D/E-C-F

grote
T

A: 0,45

D: 1,00

B: 0,63

E: 1,00

C: 1,11

F: 2,20

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$$

$$m = \frac{T^2 \cdot C}{4\pi^2}$$

$$C = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}$$

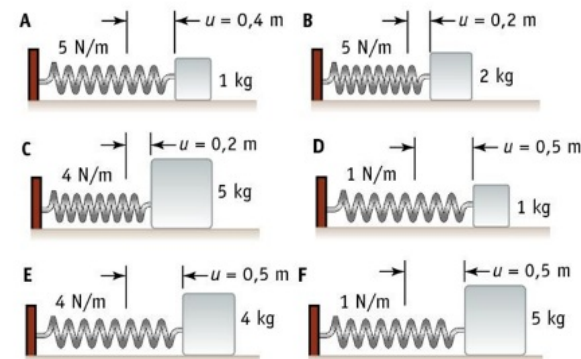
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

22 In bron 7 zijn we ervan uitgegaan dat de veer zelf geen massa heeft. Hoe verandert de trillingstijd als de veer wel massa heeft?

- A Deze wordt groter.
 - B Deze blijft gelijk.
 - C Deze wordt kleiner.
- Verklaar je antwoord.

23 In figuur 8.22 zie je zesmaal een blok dat aan een veer is bevestigd. In elke figuur wordt het blok uit zijn evenwichtsstand naar rechts getrokken. Sorteert de figuren van klein naar groot op trillingstijd.

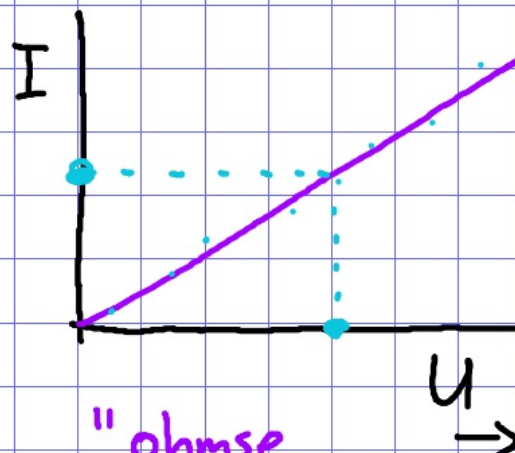
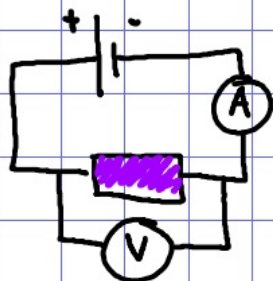


▲ Figuur 8.22

24



"niet-ohmse
weerstand"



"ohmse
weerstand"

$$U = I \cdot R \rightarrow I = \frac{1}{R} \cdot U$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

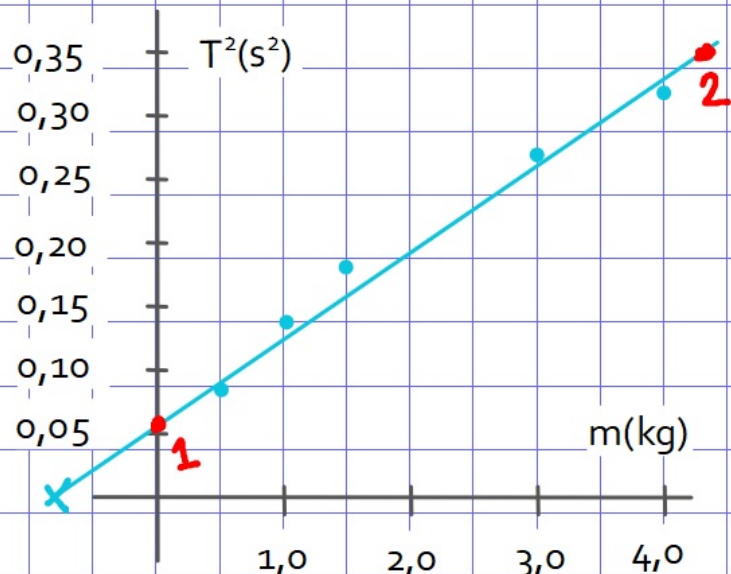
§ 8.2 Trilling en kracht

24 Diederik laat het karretje uit figuur 8.15 trillen en meet de tijdsduur van 10 trillingen. Hij verandert vervolgens de massa van het karretje en meet weer de trillingstijd. Dit herhaalt hij een paar keer. Zijn resultaten staan in de tabel.

m in kg	$10T$ in s
0,5	3,14
1,0	3,67
1,5	4,10
3,0	5,11
4,0	5,69

- Leg uit waarom Diederik $10T$ meet in plaats van T .
- Maak een grafiek van T^2 tegen m (dus m op de horizontale as). Er loopt een rechte lijn door de meetpunten. Leg uit waarom dit het geval is. $\frac{4\pi^2}{C}$.
- Toon aan dat de helling van de lijn gelijk is aan $\frac{4\pi^2}{C}$.
- Bepaal de veerconstante met behulp van de helling.
- De rechte lijn door de meetpunten snijdt de verticale as niet bij $T = 0$. Geef hier een natuurkundige verklaring voor.
- Bepaal het snijpunt van de lijn met de horizontale as. Wat geeft deze waarde aan?

24



b) rechte lijn, want:

$$T^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{m}{C}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{C}$$

$$c) T^2 = \frac{4\pi^2}{C} \cdot m$$

$$y = a \cdot x + b$$

$$d) \frac{4\pi^2}{C} = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} = \frac{0,35 - 0,05}{4,0 - 0} = \frac{0,30}{4,0} = 0,075$$

$$C = \frac{4\pi^2}{0,075} = 5,3 \cdot 10^2 \text{ N/m}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

24 Diederik laat het karretje uit figuur 8.15 trillen en meet de tijdsduur van 10 trillingen. Hij verandert vervolgens de massa van het karretje en meet weer de trillingstijd. Dit herhaalt hij een paar keer. Zijn resultaten staan in de tabel.

m in kg	$10T$ in s
0,5	3,14
1,0	3,67
1,5	4,10
3,0	5,11
4,0	5,69

- Leg uit waarom Diederik $10T$ meet in plaats van T .
- Maak een grafiek van T^2 tegen m (dus m op de horizontale as). Er loopt een rechte lijn door de meetpunten. Leg uit waarom dit het geval is. $\frac{4\pi^2}{C}$
- Toon aan dat de helling van de lijn gelijk is aan $\frac{4\pi^2}{C}$.
- Bepaal de veerconstante met behulp van de helling.
- De rechte lijn door de meetpunten snijdt de verticale as niet bij $T = 0$. Geef hier een natuurkundige verklaring voor.
- Bepaal het snijpunt van de lijn met de horizontale as. Wat geeft deze waarde aan?

25

a.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{C}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{C}}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\frac{2,0}{3,0} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$(0,66)^2 = \frac{m_1}{m_2}$$

$$m_1 = m_2 \cdot 0,436$$

$$m_1 = (m_1 + 0,50) \cdot 0,436$$

$$m_1 = 0,436m_1 + 0,436 \cdot 0,50$$

$$0,564m_1 = 0,2178$$

$$m_1 = 0,40 \text{ kg}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

25 Een blok aan een veer trilt met een trillingstijd van 2,0 s. Er wordt 0,50 kg toegevoegd aan het blok. De trillingstijd is nu 3,0 s.

a Bereken de massa van het blok.

b Bereken de veerconstante van de veer.

$$m_2 = m_1 + 0,50 \text{ kg}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} \quad m = \frac{T^2 \cdot C}{4\pi^2}$$
$$C = \frac{4\pi^2 \cdot m}{T^2}$$

26

$$b. T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{0,245}{9,81}} = 1,0 \text{ s}$$

$$d. \sqrt{\frac{m}{C}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \frac{m}{C} = \frac{l}{g} \rightarrow C = \frac{m \cdot g}{l}$$

$$f. \text{ Gebruik } A = 0,035 \text{ m en } T = 1,0 \text{ s}$$



Figuur 8.23 Slingerklok

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.2 Trilling en kracht

26 Als de uitwijking van een slinger niet te groot is geldt voor de trillingstijd:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

met l de lengte van de slinger en g de valversnelling. De slinger van een klok (figuur 8.23) heeft een lengte van 24,8 cm tot aan het midden van het gewicht. De maximale uitwijking is 8,5 cm.

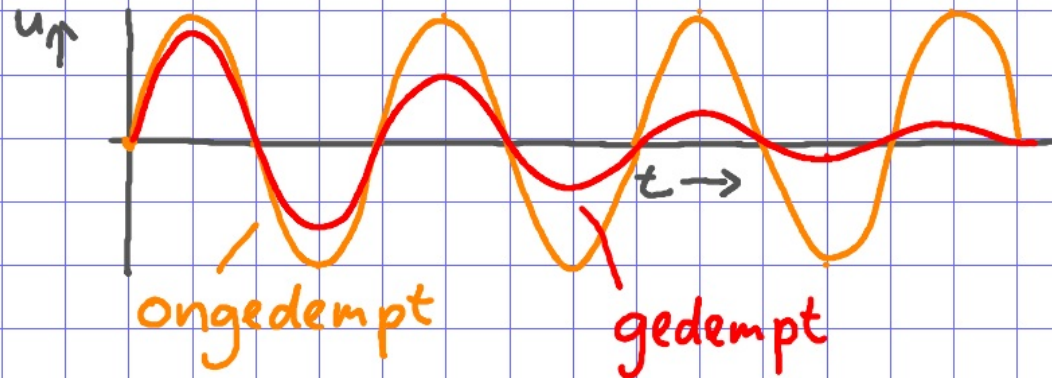
- a Hoe kun je aan de formule voor de trillingstijd zien dat het niet uitmaakt hoe zwaar het gewicht is?
- b Bereken de trillingstijd van de slinger.
- c Leg uit of deze klok op de maan bruikbaar is.
- d De formule voor de trillingstijd van een veer is ook bij een slinger bruikbaar. Leg uit dat de 'veerconstante' van een slinger gelijk is aan

$$C = \frac{m \cdot g}{l}$$

- e Geef een realistische schatting van de snelheid van de slinger in de evenwichtsstand.
- f Schets de grafiek van de uitwijking van de slinger als functie van de tijd van 0,0 s tot 2,0 s.

§ 8.3 Trillen en meetrillen

8. Bij de trilling van een veer-massasysteem wordt continu **kinetische energie** omgezet in **veerenergie** en terug. Bij een **gedempte trilling** zal de totale energie in het systeem door **negatieve arbeid** van tegenwerkende krachten steeds kleiner worden.

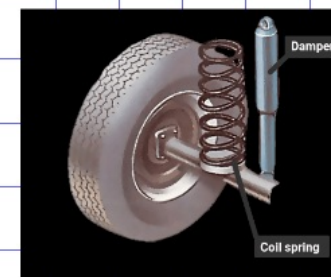


Veerenergie op **elk willekeurig moment**: $E_v = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$

Maximale veerenergie telkens als de massa de **uiterste uitwijking** bereikt:

$$E_{v,max} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2$$

Hoofdstuk 8: Trillingen



"veer-energie" = "elastische (potentiële) energie"

Bordoeffening 5:

$$a. T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{2,50}{42,0}} = 1,53 \text{ s}$$

$$b. E_{\text{veer, max}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 42,0 \cdot (0,320)^2 = 2,15 \text{ J}$$

in evenwichtsstand: $E_{\text{veer, max}} \rightarrow E_k$, dus:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad 2,15 = \frac{1}{2} \cdot 2,50 \cdot v^2 \quad v_{\text{max}} = 1,31 \text{ m/s}$$

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$$

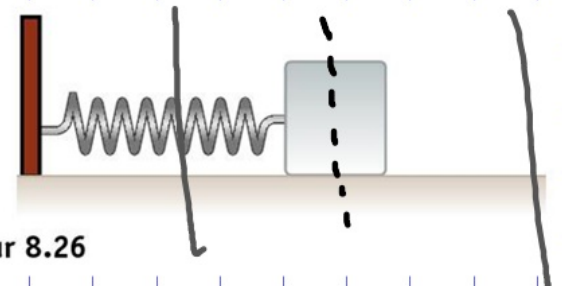
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

Bordoeffening 5:

Een blok met een massa van 2,50 kg zit vast aan een veer met $C = 42,0 \text{ N/m}$. Het blok wordt aan het oscilleren gebracht met een amplitude van 0,320 m.

- Reken uit wat de periode T van de oscillatie is.
- Reken uit met welke snelheid het blok door de evenwichtsstand beweegt.
- Bereken welke snelheid het blok heeft als het zich op 0,120 m van de evenwichtsstand bevindt.
- Bereken welke uitrekking de veer krijgt als het blok aan de veer wordt opgehangen.



▲ Figuur 8.26

Bordoeffening 5: $E_{\text{veer, max}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 42,0 \cdot (0,320)^2 = 2,15 \text{ J}$

c. $E_{\text{veer}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot 42,0 \cdot (0,120)^2 = 0,3024 \text{ J}$

$$E_k = E_{\text{veer, max}} - E_{\text{veer}} = 2,15 - 0,3024 = 1,8476 \text{ J}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad 1,8476 = \frac{1}{2} \cdot 2,50 \cdot v^2 \quad v = 1,22 \text{ m/s}$$

d. $F_z = m \cdot g = 2,50 \text{ kg} \cdot 9,81 = 24,53 \text{ N}$

$$u = \frac{F}{C} = \frac{24,53}{42,0} = 0,584 \text{ m}$$

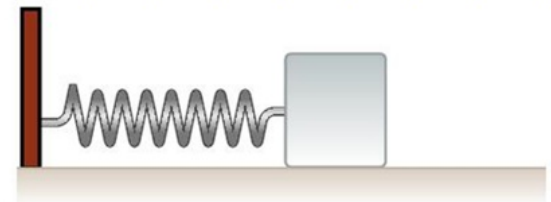
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

Bordoeffening 5:

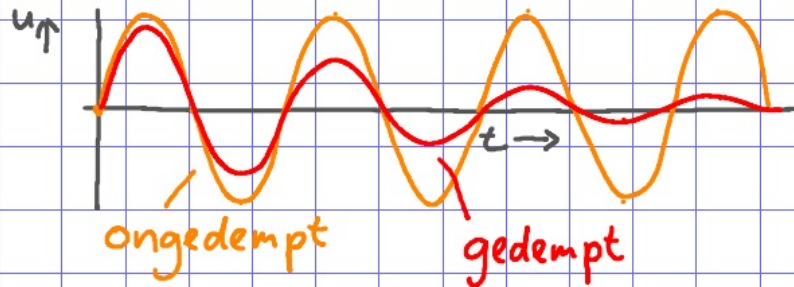
Een blok met een massa van 2,50 kg zit vast aan een veer met $C = 42,0 \text{ N/m}$. Het blok wordt aan het oscilleren gebracht met een amplitude van 0,320 m.

- Reken uit wat de periode T van de oscillatie is.
- Reken uit met welke snelheid het blok door de evenwichtsstand beweegt.
- Bereken welke snelheid het blok heeft als het zich op 0,120 m van de evenwichtsstand bevindt.
- Bereken welke uitrekking de veer krijgt als het blok aan de veer wordt opgehangen.



▲ Figuur 8.26

27



28

b.

$$E_{k, \max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,100 \text{ kg} \cdot (1,0)^2 = 0,050 \text{ J}$$

Bij maximale uitwijking $E_{k, \max} \rightarrow E_{\text{veer}, \max}$

$$E_{\text{veer}, \max} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2 \quad 0,05 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ N/m} \cdot A^2$$

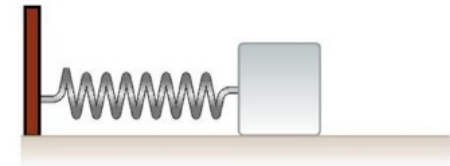
$$A = 0,10 \text{ m}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

Opdrachten

- 27 In figuur 8.25 zie je een grafiek van een gedempte trilling. Wat gebeurt er met de frequentie van de trilling als de amplitude kleiner wordt?
- 28 Een blokje van 100 g ligt op een wrijvingsloos vlak en is met behulp van een veer met een veerconstante van 10 N/m bevestigd aan een muur, zie figuur 8.26. Het blokje wordt naar rechts getrokken en losgelaten.



▲ Figuur 8.26

- a Welke energiesoort heeft het blokje op het moment dat het door de evenwichtsstand gaat?
- b Het blokje gaat door de evenwichtsstand met een snelheid van 1,0 m/s. Bereken de maximale uitwijking van het blokje bij deze trilling.

29
a.

$$E_{z, \text{voor}} = E_{k, \text{na}}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$9,81 \cdot 1,20 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot v^2$$

$$v = 4,9 \text{ m/s}$$

c.

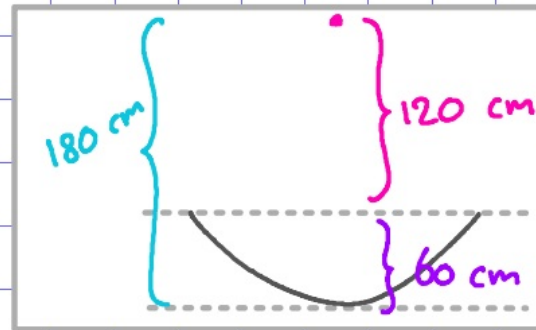
$$E_{z, \text{voor}} = E_{v, \text{na}}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$$

$$68 \text{ kg} \cdot 9,81 \cdot 1,80 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (0,60 \text{ m})^2$$

$$C = 6,7 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

fout in de uitwerkingboekje:
30 cm moet zijn 60 cm



d.



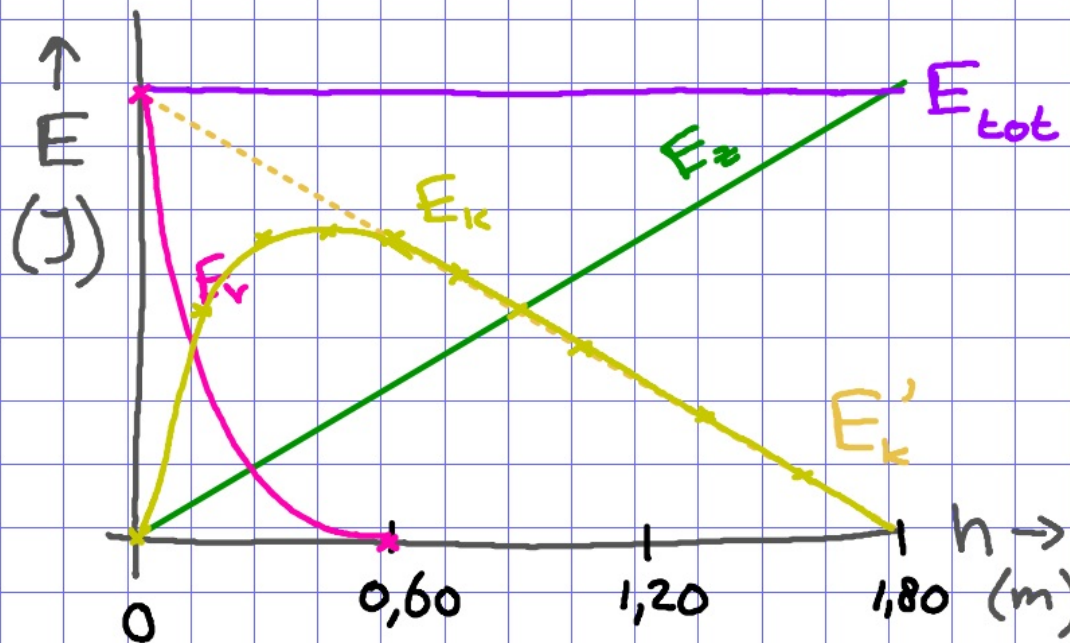
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

- 29 Bjorn valt vanaf een hoogte van 1,20 m op een trampoline. Bij het neerkomen wordt de trampoline tot 60 cm ingedrukt. De massa van Bjorn is 68 kg.
- Bereken de snelheid waarmee Bjorn op het trampoleneoppervlak valt.
 - Welke soorten energie heeft Bjorn vlak voordat hij de trampoline raakt?
 - Bereken de veerconstante van de trampoline met behulp van energie.
 - Bereken hoe ver de trampoline doorbuigt als Bjorn op de trampoline stilstaat.
 - De doorbuiging die je bij d hebt berekend noemen we de evenwichtsstand. Leg met behulp van krachten uit dat Bjorn tijdens het springen in dat punt de grootste snelheid heeft.
 - Maak een grafiek van de zwaarte-energie, veerenergie en bewegingsenergie als functie van de hoogte boven het laagste punt tijdens het springen.

Op elk moment in de beweging geldt: $E_{\text{tot}} = E_z + E_k + E_v = \text{constant}$

29
f.



$$E_z = m \cdot g \cdot h \text{ (dus rechte lijn)}$$

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2 \text{ (dus parabool)}$$

hoogte boven het laagste punt v.d. hele beweging

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

- 29 Bjorn valt vanaf een hoogte van 1,20 m op een trampoline. Bij het neerkomen wordt de trampoline tot 60 cm ingedrukt. De massa van Bjorn is 68 kg.
- Bereken de snelheid waarmee Bjorn op het trampoleneoppervlak valt.
 - Welke soorten energie heeft Bjorn vlak voordat hij de trampoline raakt?
 - Bereken de veerconstante van de trampoline met behulp van energie.
 - Bereken hoe ver de trampoline doorbuigt als Bjorn op de trampoline stilstaat.
 - De doorbuiging die je bij d hebt berekend noemen we de evenwichtsstand. Leg met behulp van krachten uit dat Bjorn tijdens het springen in dat punt de grootste snelheid heeft.
 - Maak een grafiek van de zwaarte-energie, veerenergie en bewegingsenergie als functie van de hoogte boven het laagste punt tijdens het springen.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

- 30 Een auto maakt gebruik van een schokdemper om trillingen te dempen. In een schokdemper zorgt een stroperige vloeistof (zoals olie) voor de dempende werking. Voor deze demping geldt bij benadering dat de tegenwerkende kracht recht evenredig is met de snelheid. Er geldt: $F_w = -k \cdot v$ waarbij k de dempingsfactor is.
- Geef de eenheid van k .
 - Leg uit waarom er in de formule een minteken staat.

Het model dat je in bron 5 hebt bestudeerd kun je nu uitbreiden zodat het een gedempte trilling beschrijft (figuur 8.27).

modelregels	startwaarden
$F_v = -C \cdot u$	$t = 0$
$F_w = -k \cdot v$	$dt = 0,001$
$F_{\text{netto}} = F_v + F_w$	$C = 2$
$a = F_{\text{netto}}/m$	$m = 0,81$
$v = v + a \cdot dt$	$u = 0,5$
$u = u + v \cdot dt$	$v = 0$
$t = t + dt$	$a = 0$
	$k = 0,1$

▲ Figuur 8.27

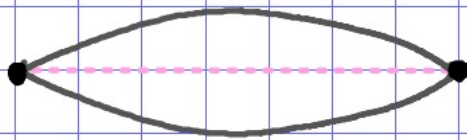
- Voer het model uit. Lees af wanneer de amplitude is afgenomen tot de helft van de oorspronkelijke amplitude.
- Als je k heel groot maakt dan trilt het voorwerp niet meer. Ga na bij welke waarde van k het voorwerp **nét** niet meer trilt.
- Deze situatie heet kritische demping. Als k nog groter wordt krijg je een overgedempte trilling. Ga na wat het verschil is tussen een kritisch gedempte trilling en een overgedempte trilling.

- Voor kritische demping geldt $k = 2\sqrt{Cm}$. Controleer met deze formule je antwoord bij d.
- De frequentie van een gedempte trilling verschilt van de frequentie van een niet-gedempte trilling. Voor de frequentie van een gedempte trilling geldt:

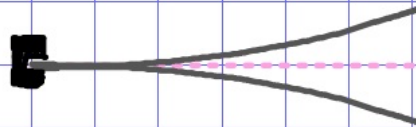
$$f_d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m} - \frac{k^2}{4m^2}}$$

Laat zien dat voor een kleine dempingsfactor de frequentie gelijk is aan de frequentie van een niet-gedempte trilling.

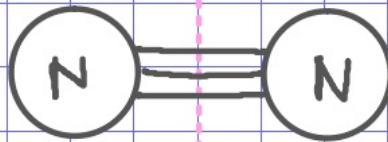
9. Voorwerpen die kunnen trillen zullen dat doen met een **eigenfrequentie** die afhangt van hoe **stug het voorwerp is** en welke **massa** het heeft.



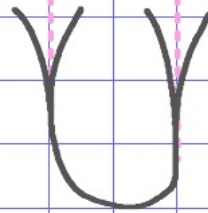
gitaarsnaar
spankracht
massa per cm



liniaal
buigzaamheid
massa per cm



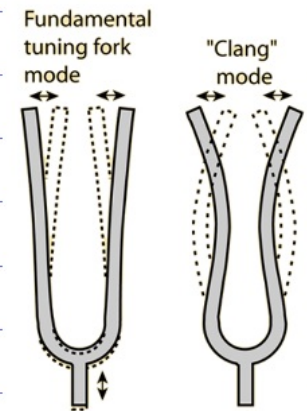
molecuul
sterkte v.d. binding
massa v.d. atomen



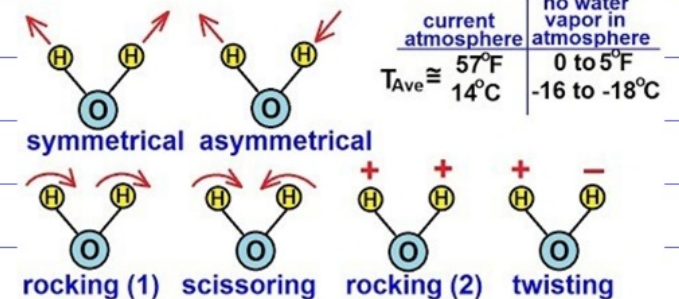
stemvork
buigzaamheid
massa v.d. benen

Hoofdstuk 8: Trillingen

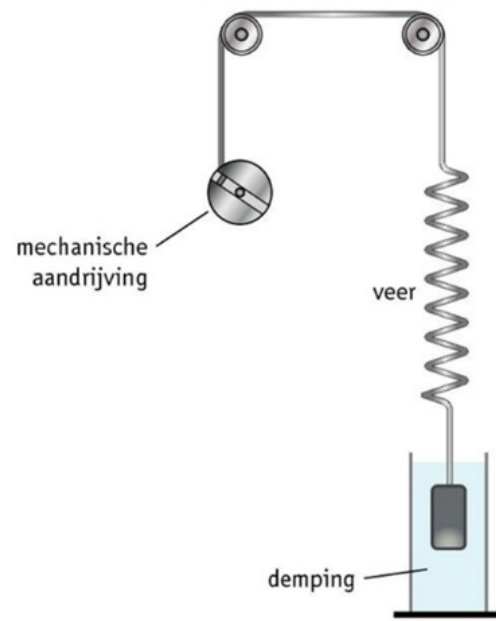
§ 8.3 Trillen en meetrillen



5 Water molecule has many vibration modes



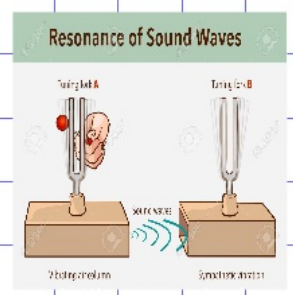
9 (vervolg). Als een voorwerp duwtjes krijgt in dezelfde frequentie als de eigenfrequentie van het voorwerp zal het mee gaan trillen. Dit verschijnsel heet **resonantie**. Door deze duwtjes is prake van een **aangedreven oscillatie**.



▲ Figuur 8.30

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen



10. Als twee geluidsbronnen in elkaars buurt met ietwat verschillende frequenties staan te strillen zijn **zwevingen** te horen.

De toon die je hoort is het gemiddelde van de twee bronnen:

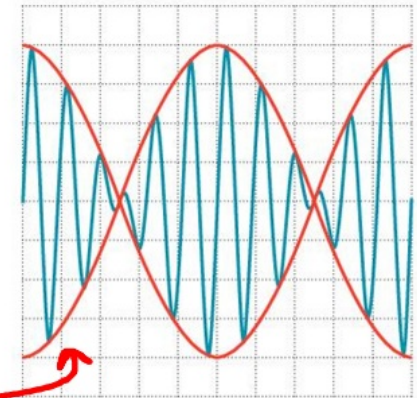
$$f_{\text{gem}} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Deze gemiddelde toon wordt harder en zachter met een eigen frequentie, de **zwevingsfrequentie**:

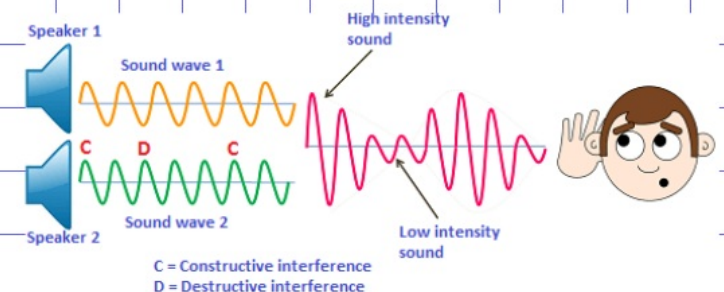
$$f_{\text{zweving}} = f_1 - f_2$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

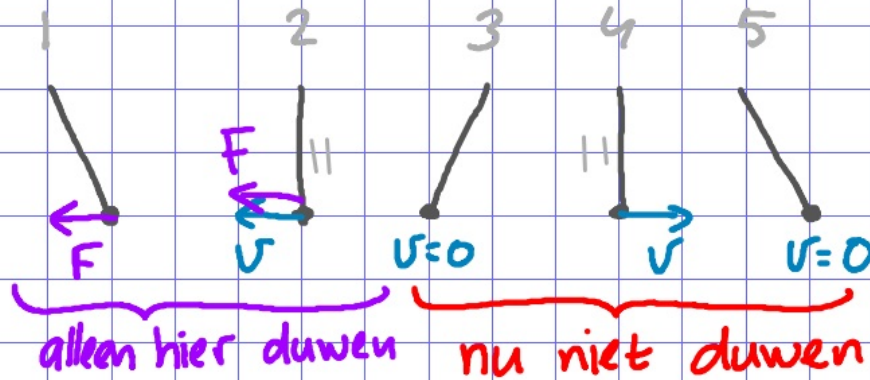


▲ **Figuur 8.32** Een zweving van twee verschillende tonen met dezelfde amplitude

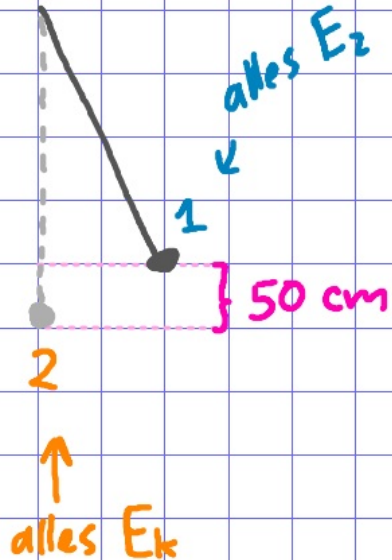


32

a.



b.



$$E_z = E_k$$

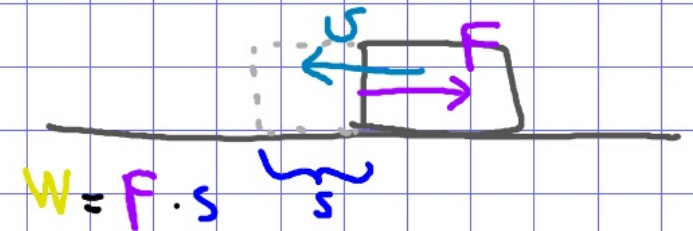
$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 3,1 \text{ m/s}$$

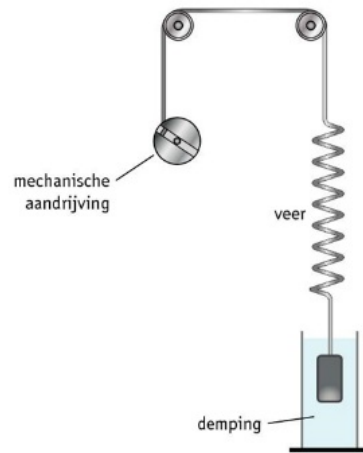
Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

- 31 Een klein kind op een schommel doet haar best om in beweging te komen, maar het wil niet lukken. Een wat oudere kind dat heeft leren schommelen kan het wel.
- Wat heeft het oudere kind gevoelsmatig geleerd waardoor het wel kan schommelen?
 - Wat gebeurt er met de energie, elke keer als het kind een afzet maakt?
- 32 Een schommel heeft een eigenfrequentie van 0,30 Hz. Benthe zit op de schommel en wordt geduwd door haar broertje Tieme. Tieme snapt het principe van resonantie echter nog niet helemaal en duwt met de halve frequentie.
- Leg uit of Benthe toch iets aan de hulp van Tieme heeft.
 - Op een gegeven moment komt Benthe in de uiterste stand 50 cm hoger dan in de evenwichtsstand. Bereken de snelheid van Benthe in de evenwichtsstand.



- 33 In figuur 8.30 zie je een opstelling voor een gedempte aangedreven trilling. Een blok aan een veer kan trillen in water. De veer kan door middel van een motortje op en neer bewegen met een regelbare frequentie.



▲ Figuur 8.30

In figuur 8.27 bij opdracht 30 is het model van een gedempte trilling gegeven. Dit model ga je uitbreiden naar een model dat een gedempte aangedreven trilling beschrijft, zie figuur 8.31. De kracht die de motor uitoefent wordt omschreven met F_m . De frequentie f van het motortje is het aantal maal dat de motor per seconde draait.

modelregels	startwaarden
$F_v = -C \cdot u$	$t = 0$
$F_m = 0,5 \cdot \sin(6,28 \cdot f \cdot t)$	$dt = 0,001$
$F_w = -k \cdot v$	$C = 2$
$F_{\text{netto}} = F_v + F_w + F_m$	$m = 0,81$
$a = F_{\text{netto}}/m$	$u = 0$
$v = v + a \cdot dt$	$v = 0$
$u = u + v \cdot dt$	$a = 0$
$t = t + dt$	$k = 0,25$
	$f = 0$

▲ Figuur 8.31

- Leg uit wat het resultaat is als het model wordt uitgevoerd met de frequentie 0.
- Voer het model uit. Kies het aantal stappen zo dat de trilling 40 s duurt. Varieer de waarde van de frequentie met stapjes van 0,05 Hz tussen 0 en 0,6 Hz en bepaal telkens de amplitude. Maak een grafiek van de amplitude als functie van de frequentie.
- Bepaal de frequentie van het motortje waarbij de amplitude maximaal is.
- Leg uit hoe je de uitkomst van opdracht c had kunnen voorspellen.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

34

a. $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{1400}{33 \cdot 10^3}} = 1,3 \text{ Hz}$

b. $E_{v, \max} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 10^3 \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 41 \text{ J}$

c. $E_{k, \max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2$ $41 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 1400 \cdot v_{\max}^2$
 $v_{\max} = 0,24 \text{ m/s}$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.3 Trillen en meetrillen

- 34 Een auto heeft met inzittenden een massa van 1400 kg. De veren onder de auto hebben een totale veerconstante van 33 kN/m. De auto rijdt over een drempel, waardoor de veren 5,0 cm worden ingedrukt. De auto gaat even trillen.
- a Bereken de trillingstijd van deze trilling.
 - b Bereken de maximale veerenergie die de veren door het rijden over de drempel hebben gekregen.

c Bereken de verticale snelheid waarmee de auto door de evenwichtsstand gaat. Neem aan dat de trilling niet gedempt is.

~~d~~ In werkelijkheid is de trilling wel gedempt. Na iedere halve trilling is de veerenergie met 50% afgenomen. Maak een tabel met drie kolommen:

- (1) percentage energie dat nog over is,
- (2) veerenergie,
- (3) maximale uitwijking.

Vul de tabel in voor vijf uiterste standen.

~~e~~ Teken de grafiek van de uitwijking van deze trilling voor 2,5 trilling.

~~f~~ Teken de grafiek van de energieën als functie van de tijd: totale, veer- en bewegingsenergie. Gebruik verschillende kleuren.

(35)

d.

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{443 + 440}{2} = 441,5 \text{ Hz}$$

→ ————— git (443 Hz)
————— stemv. 440 Hz
————— git (439 Hz)

Hoofdstuk 8: Trillingen

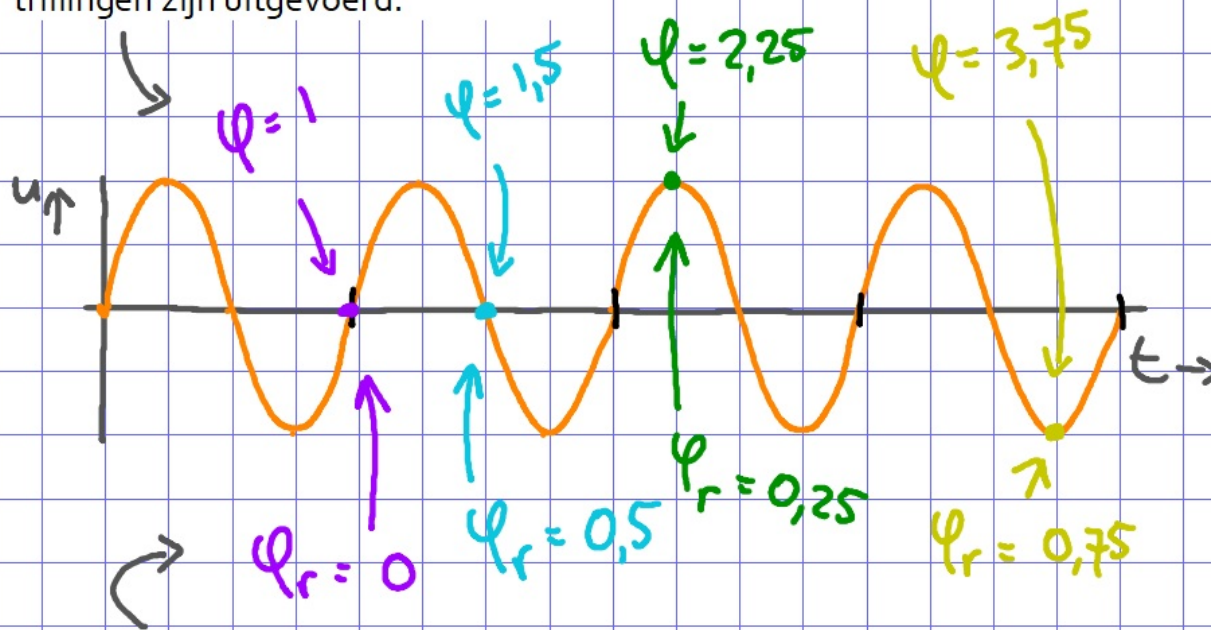
§ 8.3 Trillen en meetrillen

- 35 Lees bron 10. Johan heeft een stemvork ($f = 440 \text{ Hz}$) op een klankkast en wil hiermee zijn gitaar stemmen. Hij speelt een A op zijn gitaar. Die hoort een frequentie te hebben van 440 Hz .
- a Om ervoor te zorgen dat zijn gitaar goed gestemd is slaat hij de stemvork aan en speelt hij tegelijkertijd dezelfde toon op zijn gitaar. De gitaar van Johan is nog niet goed gestemd, want Johan hoort nu zwevingen met een frequentie van $2,0 \text{ Hz}$. Hoe groot is het frequentieverschil tussen de toon van de stemvork en de toon van de snaar?
- b Is zijn gitaar op een te hoge of een te lage frequentie afgestemd? Leg uit.
- c Door de snaar strakker te spannen vergroot Johan de frequentie geleidelijk met $1,0 \text{ Hz}$. Hij hoort dat de zwevingsfrequentie langzaam groter wordt. Is zijn gitaar op een te hoge of een te lage frequentie afgestemd? Leg uit.
- d Leg uit wat de frequentie is van de toon die Johan hoort.

§ 8.4 Fase en snelheid

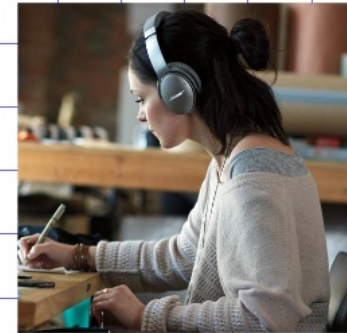
11. De **fase** van een trilling op een bepaald tijdstip geeft aan hoeveel trillingen zijn uitgevoerd.

$$\varphi = \frac{t}{T}$$



De **gereduceerde fase** van een trilling op een bepaald tijdstip geeft aan welk deel (bijv. "50%") van de huidige trilling op dat moment al is uitgevoerd.

Hoofdstuk 8: Trillingen



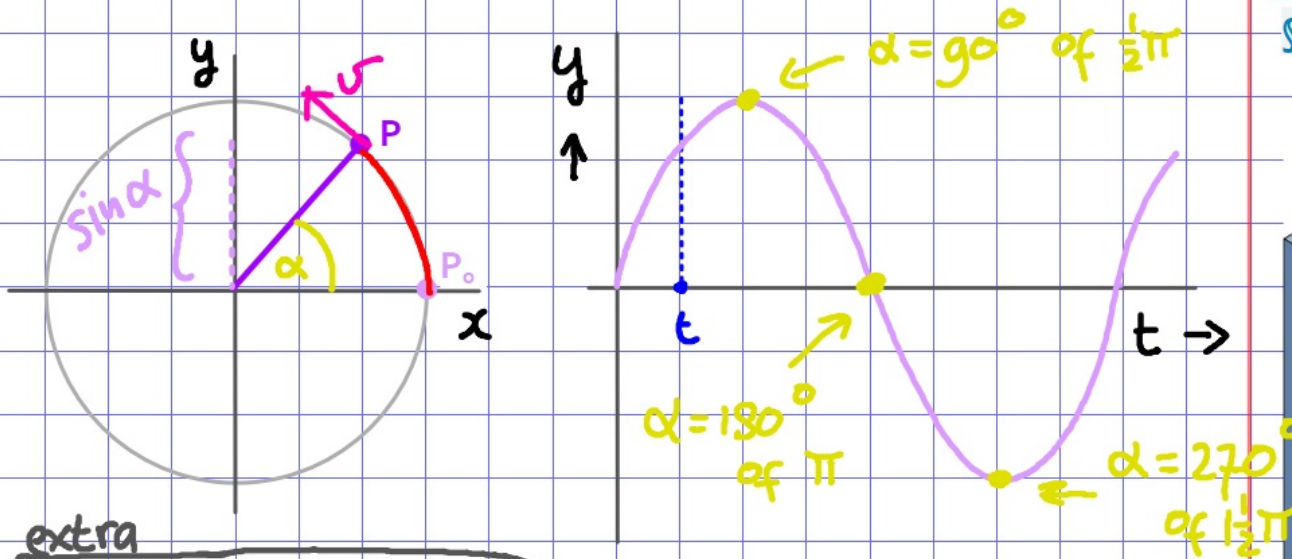
Bordoeffening 6: Reken de fase en de gereduceerde fase uit na 3,0 s van een trilling die een trillingstijd van 0,8 s heeft.

Bordoeffening 6:

$$\varphi = \frac{t}{T} = \frac{3,0}{0,8} = 3,75$$

$$\varphi_r = 3,75 - 3 = 0,75$$

12. In een eenparige cirkelbeweging is een harmonische trilling te herkennen:



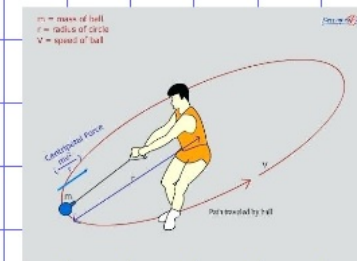
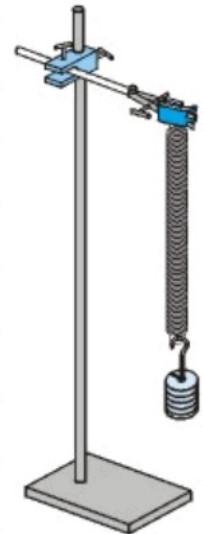
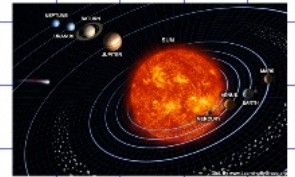
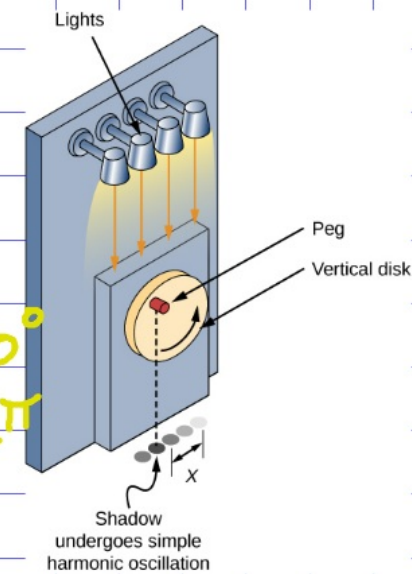
extra

Het punt P draait rond met een bepaalde **hoeksnelheid** ω en heeft een **baansnelheid** v . Op een **tijdstip** t heeft punt P een bepaalde **baanafstand** s afgelegd en is t.o.v. de oorsprong O gedraaid over een bepaalde **fasehoek** α .

Aan de y/t -grafiek van de positie van het punt P is te zien dat een harmonische trilling is te herkennen. Aan de fase bij het moment t is dus een **fasehoek** α toe te kennen. Dit geldt ook bij trillingen in 1 dimensie.

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid



12 (vervolg). Je kunt de **fasehoek** van een trilling (of een cirkelbeweging) op een zeker toekomstig moment uitrekenen:

fase:

$$\varphi = \frac{t}{T}$$

fasehoek:

$$\alpha = 2\pi \cdot \varphi = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = 360^\circ \cdot \frac{t}{T}$$

RAD RAD DEG

Als je de fasehoek en de amplitude van een trilling weet kun je de **uitwijking op elk moment** uitrekenen:

$$y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

α
 φ_r

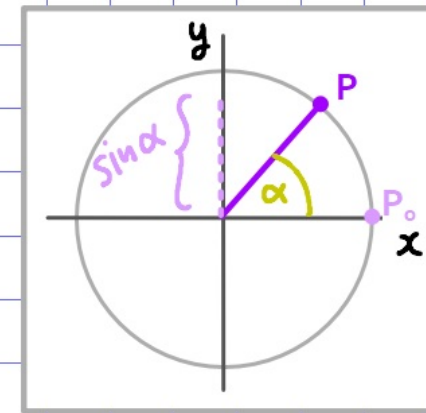
Bordoeffening 7:

a. $A = 0,35 \text{ m}$

b. $2\pi \cdot \frac{t}{T} = 4,0 \cdot t \rightarrow T = 1,57 \text{ s}$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid



Bordoeffening 7: Van een harmonische trilling die een massa ondergaat is bekend:

$y = 0,35 \text{ m} \sin(4,00 \cdot t)$. Reken uit / geef:

- de amplitude
- de trillingstijd
- de positie v.d. massa op $t = 2,1 \text{ s}$
- de fase v.d. trilling op $t = 2,1 \text{ s}$
- de gereduceerde fase op $t = 2,1 \text{ s}$
- de fasehoek v.d. trilling op $t = 2,1 \text{ s}$ in deg en rad

$$4,00 = \frac{2\pi}{T}$$

fase:

$$\varphi = \frac{t}{T}$$

fasehoek:

$$\alpha = \underbrace{2\pi}_{\text{RAD}} \cdot \underbrace{\varphi_r}_{\text{RAD}} = \underbrace{2\pi}_{\text{RAD}} \cdot \frac{t}{T} = \underbrace{360^\circ}_{\text{DEG}} \cdot \frac{t}{T}$$

$$y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Bordoeffening 7:

a. $A = 0,35 \text{ m}$ b. $2\pi \cdot \frac{t}{T} = 4,0 \cdot t \rightarrow T = 1,57 \text{ s}$

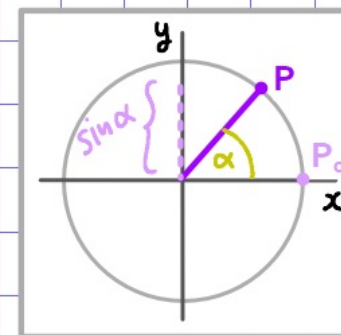
c. $y = A \cdot \sin(4,00 \cdot t) = 0,35 \cdot \sin(4,00 \cdot 2,1) = 0,30 \text{ m}$

d. $\varphi = \frac{t}{T} = \frac{2,1 \text{ s}}{1,57 \text{ s}} = 1,34$ e. $\varphi_r = 0,34$

f. $\alpha = 2\pi \cdot \varphi_r = 6,28 \cdot 0,33 = 2,07 \text{ rad}$
 $= 360 \cdot 0,33 = 122^\circ$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid



Bordoeffening 7: Van een harmonische trilling die een massa ondergaat is bekend:

$y = 0,35 \text{ m} \sin(4,00 \cdot t)$. Reken uit / geef:

a. de amplitude

b. de trillingstijd $\leftarrow 4,00 = \frac{2\pi}{T}$

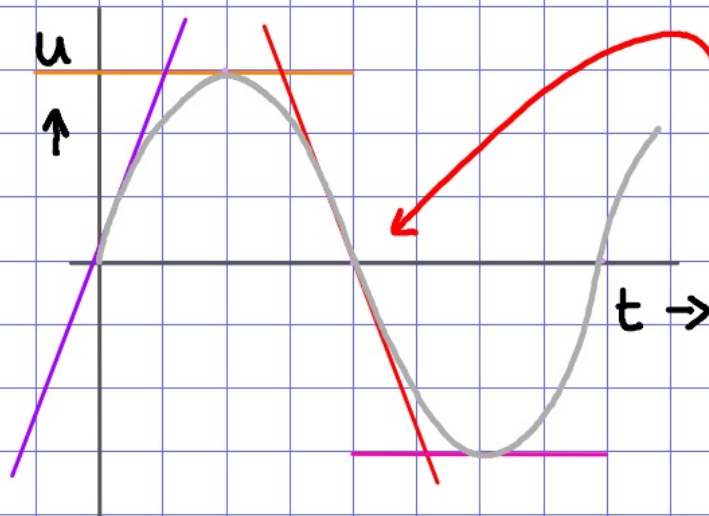
c. de positie v.d. massa op $t = 2,1 \text{ s}$

d. de fase v.d. trilling op $t = 2,1 \text{ s}$

e. de gereduceerde fase op $t = 2,1 \text{ s}$

f. de fasehoek v.d. trilling op $t = 2,1 \text{ s}$ in deg en rad

13. Uit een u/t-grafiek kun je de **momentane snelheid** van de trillende massa bepalen met een raaklijn (het is immers een plaats/tijdgrafiek).



De maximale snelheid heeft de massa op het moment dat deze door de evenwichtsstand beweegt. Deze snelheid vind je met:

$$v_{\max} = 2\pi \cdot \frac{A}{T}$$

Bordoeffening 7:

$$g. \quad v_{\max} = 2\pi \cdot \frac{A}{T} = 6,28 \cdot \frac{0,35 \text{ m}}{1,57 \text{ s}} = 1,4 \text{ m/s}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

fase:
 $\varphi = \frac{t}{T}$

fasehoek:
 $\alpha = 2\pi \cdot \varphi = 2\pi \cdot \frac{t}{T} = 360^\circ \cdot \frac{t}{T}$
RAD RAD DEG

$$y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

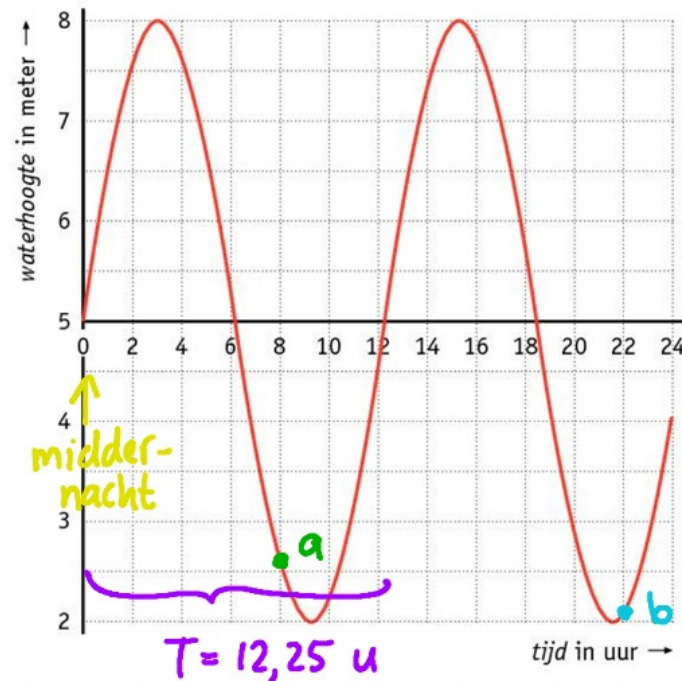


Bordoeffening 7: Van een harmonische trilling die een massa ondergaat is bekend:

$y = 0,35 \text{ m} \sin(4,00 \cdot t)$. Reken uit / geef:

- de amplitude
- de trillingstijd
- de positie v.d. massa op $t = 2,1 \text{ s}$
- de fase v.d. trilling op $t = 2,1 \text{ s}$
- de gereduceerde fase op $t = 2,1 \text{ s}$
- de fasehoek v.d. trilling op $t = 2,1 \text{ s}$ in deg en rad
- de maximale snelheid van de massa

36



▲ Figuur 8.34 De waterhoogte op een dag bij Le Havre

$$a. \varphi = \frac{t}{T} = \frac{8,00}{12,25} = 0,65$$

$$b. \varphi = \frac{t}{T} = \frac{22,0}{12,25} = 1,80$$

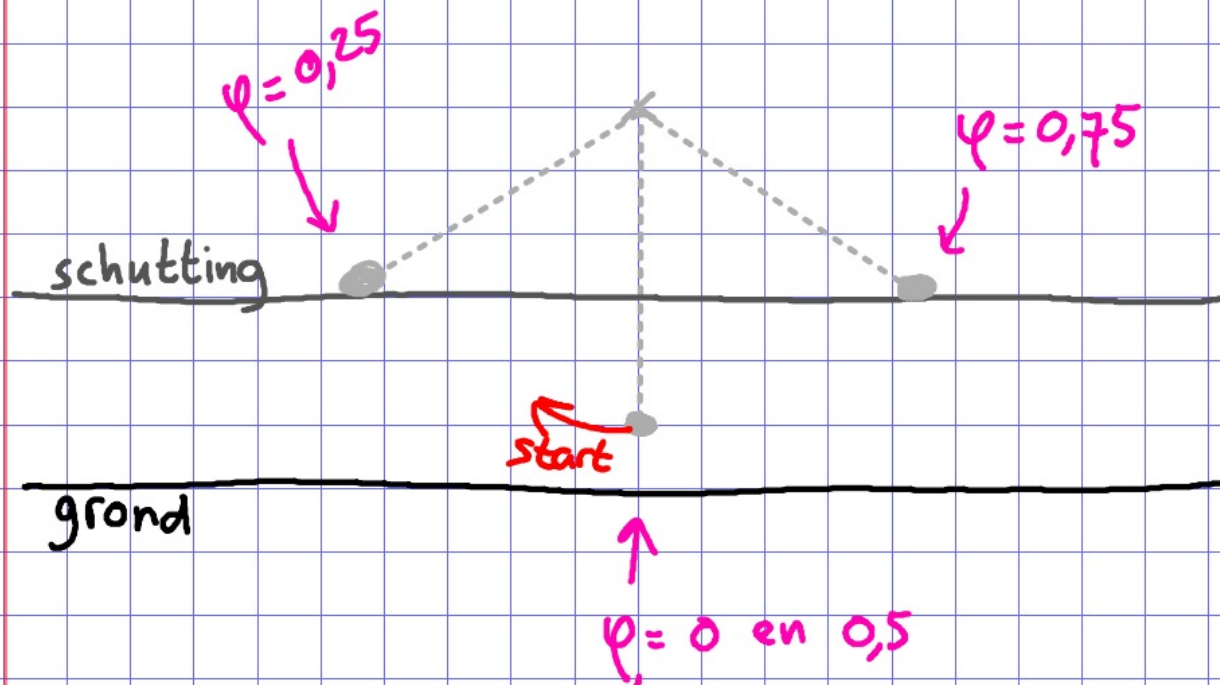
dus $\varphi_r = 0,80$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

Opdrachten

- 36 In figuur 8.34 staat de grafiek van de waterhoogte op een dag bij Le Havre.
- a Bepaal de fase van deze trilling om 8 uur's ochtends.
 - b Bepaal de gereduceerde fase om 10 uur's avonds.
- 37 Je buurmeisje schommelt achter de schutting en komt in beide hoogste standen precies met haar hoofd boven de schutting uit. De trillingstijd van de schommelbeweging is 3,5 s.
- a Welk faseverschil zit er tussen de beide keren dat je haar hoofd ziet?
 - b Welk tijdsverschil zit er tussen het moment dat je haar hoofd ziet en het moment waarop de schommel door de evenwichtsstand gaat?



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

Opdrachten

- 36 In figuur 8.34 staat de grafiek van de waterhoogte op een dag bij Le Havre.
- Bepaal de fase van deze trilling om 8 uur's ochtends.
 - Bepaal de gereduceerde fase om 10 uur's avonds.
- 37 Je buurmeisje schommelt achter de schutting en komt in beide hoogste standen precies met haar hoofd boven de schutting uit. De trillingstijd van de schommelbeweging is 3,5 s.
- Welk faseverschil zit er tussen de beide keren dat je haar hoofd ziet?
 - Welk tijdsverschil zit er tussen het moment dat je haar hoofd ziet en het moment waarop de schommel door de evenwichtsstand gaat?

38

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T} = \frac{45 \text{ d}}{365 \text{ d}} = 0,12$$

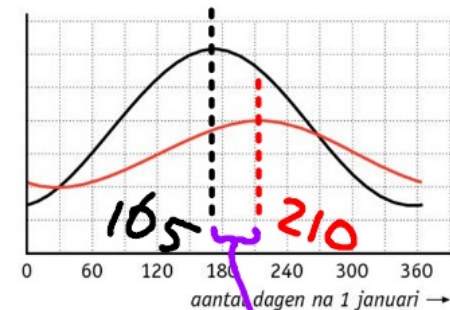
$$\Delta t = 45 \text{ d}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

38 In Nederland verandert de maximale hoogte van de zon per dag volgens figuur 8.36. Op 21 juni staat de zon op zijn hoogst. De gemiddelde maximumtemperatuur per dag staat ook in figuur 8.36 aangegeven.

- Het moment dat de zon op zijn hoogst staat valt niet samen met het moment dat de luchttemperatuur het hoogst is. Leg dit uit.
- Schat het verschil in fase tussen de hoogte van de zon en de temperatuur.



▲ **Figuur 8.36** Het verloop van de gemiddelde maximumtemperatuur (rode lijn) en de hoogte van de zon (zwarte lijn)

$$a) 3 \cdot T = 1,5 \text{ s} \rightarrow T = 0,5 \text{ s} \rightarrow f = 2,0 \text{ Hz}$$

$$b) A = 0,2 \text{ m en } T = 0,5 \text{ s; dus}$$

$$u(t) = 0,2 \text{ m} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{0,5}\right)$$

$$u(t) = 0,2 \text{ m} \cdot \sin(\pi \cdot t)$$

$$c) u(0,40) = 0,2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{0,40}{0,5}\right) = -0,19 \text{ m}$$

$$d) u = 0,2 \cdot \sin(2\pi \cdot 0,80) = -0,19 \text{ m}$$

$$y = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

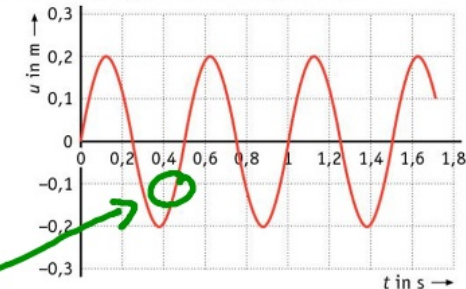
Diagram showing the general sine wave equation with labels: A (amplitude), t (time), T (period), and ϕ_r (phase shift).

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

Opdrachten

39 Boven een wieg hangt een vogeltje aan een lange slappe veer. De oppas maakt de grafiek van de trilling van het vogeltje, te zien in figuur 8.38.



▲ Figuur 8.38

- Bepaal de frequentie uit de grafiek.
- Stel de plaatsfunctie $u(t)$ op van deze beweging.
- Bereken de uitwijking van het vogeltje op het tijdstip $t = 0,40$ s.
- Bereken de uitwijking als de fase $0,80$ is.
- Bereken de fase waarop het vogeltje voor het eerst in de grafiek op 20 cm hoogte boven de evenwichtsstand zit.
- Op welke fase zit het vogeltje anderhalve trilling later?

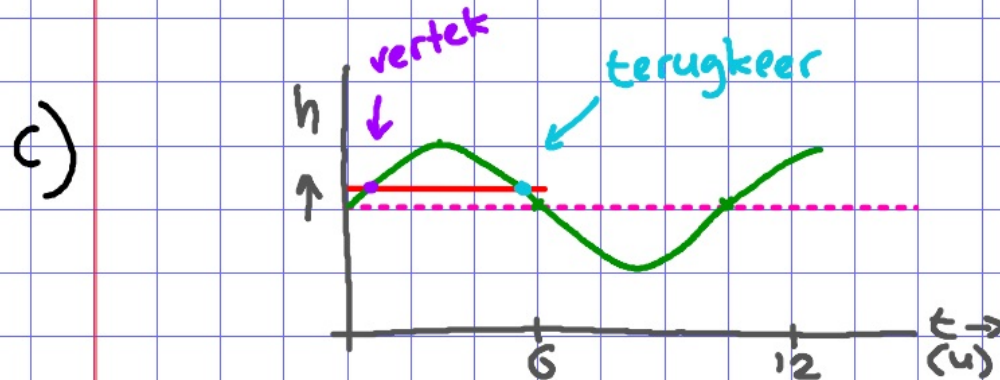
40

$$u(t) = 5,0 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{6}\right) + 3,0$$

a) $u(t) = 3,0 + 5,0 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{12}\right)$

↑ evenwichtsstand ↑ amplitude ↑ trillingstijd

b) $u(t) = 3,0 + 5,0 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{0,5}{12}\right) = 4,3 \text{ m}$



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

40 De waterstand in een haven kan beschreven worden

met de plaatsfunctie $u(t) = 5,0 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{6}\right) + 3,0$

met t het tijdstip in uren na 12 uur 's nachts en de uitwijking u in m.

a Leg aan de hand van de plaatsfunctie uit hoe groot de amplitude en trillingstijd van deze beweging zijn.

b Een kapitein heeft uitgerekend dat zijn boot pas na half 1 's nachts kan uitvaren. Hoe hoog moet het water staan voor zijn boot kan uitvaren?

c Leg uit tot welk tijdstip de boot kan terugkeren voordat het water te laag staat.

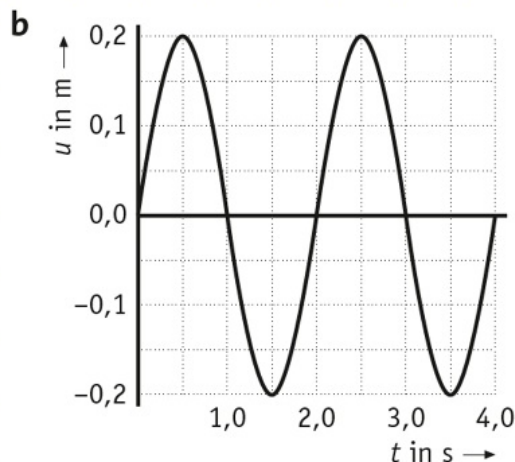
(in deze opgave is de periode T van eb-vloed 12,0 u)

41

a.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{50}{500}} = 2,0 \text{ s}$$

b.



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

Opdrachten

- 41 Een duikplank heeft een veerconstante van 500 N/m . Isabel van 50 kg veert rustig op de plank op en neer. De amplitude is 20 cm .
- a Bereken de trillingstijd van deze trilling.
 - b Teken de grafiek van deze trilling. Teken twee periodes.
 - c Isabel wil hoger komen en zet zich op bepaalde momenten af. Op welke momenten kan ze zich het beste afzetten? Hoe groot is dan de gereduceerde fase? Leg uit.
 - d Wat is de gereduceerde fase van de trilling als Isabel uiteindelijk los komt van de duikplank?
 - e Verklaar dat de duikplank na de sprong van Isabel sneller trilt.

$$\frac{1}{2} CA^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$v_{\max}^2 = \frac{CA^2}{m}$$

$$v_{\max}^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m \cdot A^2}{T^2 \cdot m}$$

$$v_{\max} = \frac{2\pi \cdot A}{T}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

$$T = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{C}}$$

$$\sqrt{C} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{T}$$

$$C = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

- 42 a Bij de trilling van een massa aan een veer wordt voortdurend veerenergie omgezet in bewegingsenergie. Gebruik deze energieomzetting om de formule aan te tonen voor de maximale snelheid:

$$v_{\max} = 2\pi \cdot \frac{A}{T}$$

Hint: gebruik onder andere de formule voor de trillingstijd van een massa aan een veer.

- b De afgeleide van de plaatsfunctie geeft de snelheidsfunctie. Toon de formule voor de maximale snelheid aan door de plaatsfunctie te differentiëren.



Formules afleiden

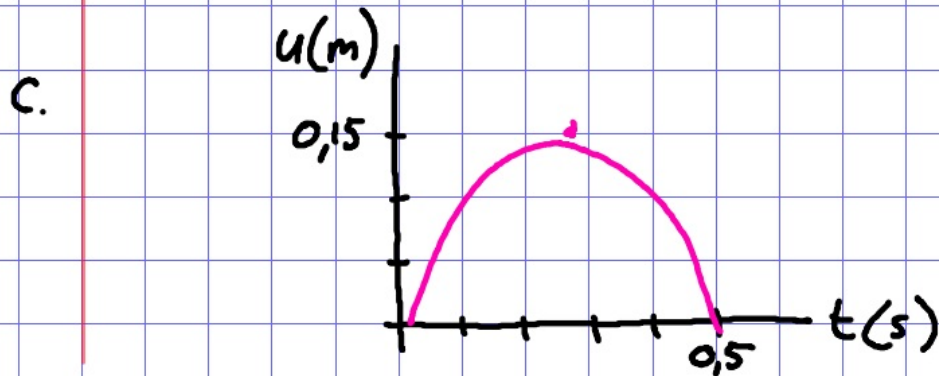
1. Definieer je GOAL
2. Verzamel formules, die:
 - of zit in goal
 - of is "van toepassing"
3. Combineren en herleiden

43

a.
$$C = \frac{F}{u} = \frac{1,67 \cdot 10^6}{0,15} = 1,1 \cdot 10^7 \text{ N/m}$$

b.
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} = 6,28 \cdot \sqrt{\frac{250 \cdot 10^3}{1,1 \cdot 10^7}} = 0,94 \text{ s}$$

De botsing duurt een halve periode, dus 0,47 s



Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

43 De machinist van een trein van 250 ton heeft vergeten de trein op de handrem te zetten. Op het rangeerterrein rijdt de trein met een snelheid van 1,0 m/s tegen een stootbuffer aan. De buffer wordt 0,15 m ingedrukt. De veerkracht op de trein is dan $1,67 \cdot 10^6$ N. Dan veert de buffer weer terug en krijgt de trein een snelheid van 1,0 m/s de andere kant op.

a Bereken de veerconstante van de buffer.

b Bereken hoelang het contact met de buffer duurt.

c Teken de plaatsgrafiek van de trein gedurende deze tijd.

44 In opdracht 40 is de waterstand in een haven beschreven.

a Leg uit op welk tijdstip het water het snelst daalt.

b Bereken de snelheid waarmee het water daalt op dat tijdstip.

45 Lees bron 14 over de metronoom.

a Leg uit dat als de ondergrond te stevig vastzit de metronomen niet in fase gaan lopen.

b De trillingstijd van de metronoom in figuur 8.41 is te variëren door het bovenste gewichtje te verplaatsen. Hiermee verplaats je het zwaartepunt van de slinger. Leg uit waarom het zwaartepunt van de slinger wel onder het draaipunt moet zitten. Het zwaartepunt is het punt waar de zwaartekracht aangrijpt.

$$u(t) = 3,0 + 5,0 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{12}\right)$$

↑ evenwichtsstand
 ↑ amplitude
 ↑ trillingstijd



▲ **Figuur 8.41** Een metronoom

Hoofdstuk 8: Trillingen

§ 8.4 Fase en snelheid

- 43** De machinist van een trein van 250 ton heeft vergeten de trein op de handrem te zetten. Op het rangeerterrein rijdt de trein met een snelheid van 1,0 m/s tegen een stootbuffer aan. De buffer wordt 0,15 m ingedrukt. De veerkracht op de trein is dan $1,67 \cdot 10^6$ N. Dan veert de buffer weer terug en krijgt de trein een snelheid van 1,0 m/s de andere kant op.
- Bereken de veerconstante van de buffer.
 - Bereken hoelang het contact met de buffer duurt.
 - Teken de plaatsgrafiek van de trein gedurende deze tijd.
- 44** In opdracht 40 is de waterstand in een haven beschreven.
- Leg uit op welk tijdstip het water het snelst daalt.
 - Bereken de snelheid waarmee het water daalt op dat tijdstip.
- 45** Lees bron 14 over de metronoom.
- Leg uit dat als de ondergrond te stevig vastzit de metronomen niet in fase gaan lopen.
 - De trillingstijd van de metronoom in figuur 8.41 is te variëren door het bovenste gewichtje te verplaatsen. Hiermee verplaats je het zwaartepunt van de slinger. Leg uit waarom het zwaartepunt van de slinger wel onder het draaipunt moet zitten. Het zwaartepunt is het punt waar de zwaartekracht aangrijpt.

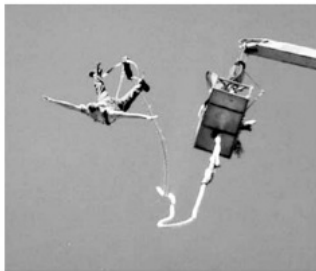
- Toepassingen -

Opgave 1 Bungeejump (Examen vwo 2001-II Na1)

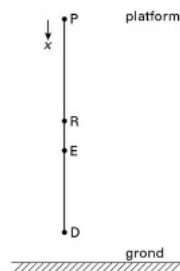
Joop mag voor zijn verjaardag op kosten van zijn vrienden een bungeejump maken.

Een 15 m lang, elastisch koord is aan één kant vastgemaakt aan een platform en aan de andere kant aan Joop. Hij laat zich zonder beginsnelheid van het platform vallen.

Zie figuur 8.42. In het laagste punt van de 'sprong' is het koord 20 m uitgerekt.



▲ Figuur 8.42



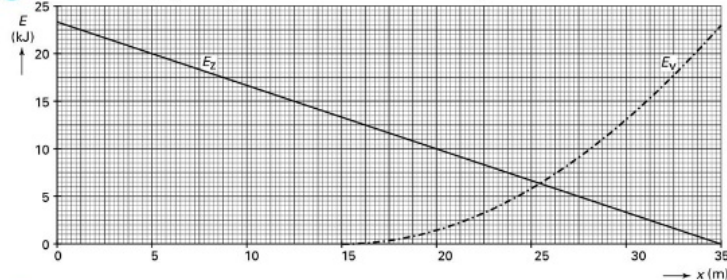
▲ Figuur 8.43

- 1 Bereken de snelheid na 15 m vallen. Verwaarloos weerstandskrachten.

Voor een natuurkundige beschrijving van de sprong zijn vier punten op verschillende hoogten interessant. In de schematische tekening van figuur 8.43 zijn deze punten met letters aangegeven:

- P is het platform waar de sprong begint;
- R is de plaats (15 m onder P) waar het koord begint uit te rekken;
- E is de evenwichtsstand waar Joop aan het einde van de sprong in rust blijft hangen voordat hij weer omhoog getrokken wordt;
- D is het laagste punt (35 m onder P).

- 2 Bereken of Joop op het traject van R naar E versnelt of vertraagt. Verwaarloos weerstandskrachten.



▲ Figuur 8.44

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

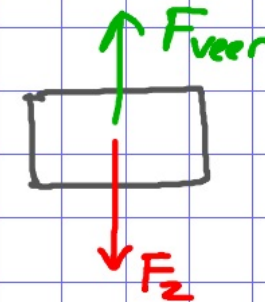
$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = 9,81 \cdot 15 \text{ m}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{In punt E geldt:}$$

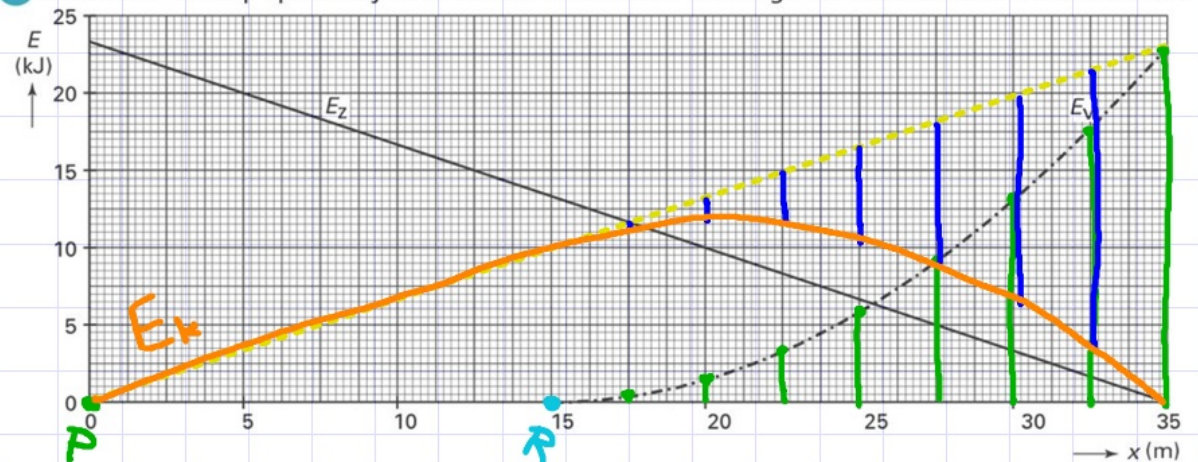
$$\text{dus } a=0 \quad \leftarrow \quad F_z = F_{\text{veer}}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

Toepassingen



- 2 Bereken of Joop op het traject van R naar E versnelt of vertraagt. Verwaarloos weerstandskrachten.



Hoofdstuk 8: Trillingen

In figuur 8.44 zijn de zwaarte-energie E_z van Joop ten opzichte van punt D en de veerenergie E_v van het koord uitgezet tegen de valafstand x , die gemeten wordt ten opzichte van punt P.

- 3 Teken in de figuur op het werkblad de grafiek voor de kinetische energie van Joop als functie van de valafstand x . Verwaarloos weerstandskrachten.

In werkelijkheid spelen weerstandskrachten bij bungeejumpen een belangrijke rol. Dat kun je zien als je naar een bungeejump staat te kijken.

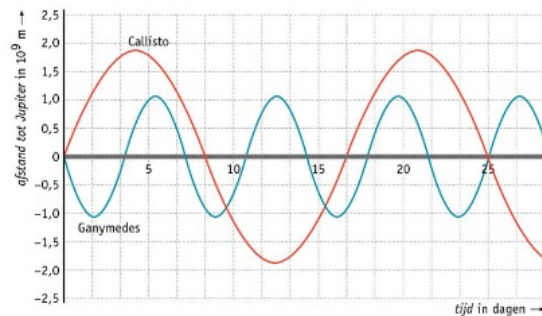
- 4 Leg uit waaraan je dat kunt zien.

Opgave 2 Manen van Jupiter

De twee grootste manen van Jupiter zijn Ganymedes en Callisto. Ze draaien beide in een cirkelvormige baan rond Jupiter. De twee manen bewegen in hetzelfde vlak. De aarde ligt ook in dit vlak. Daardoor zien we vanaf de aarde de manen alleen maar heen en weer gaan, waarbij ze afwisselend vóór en achter Jupiter langs gaan.

De beweging zoals wij die zien is op te vatten als een harmonische trilling.

Figuur 8.45 geeft de beweging van Ganymedes en Callisto gedurende 28 dagen. Jupiter heeft een straal van $0,0714 \cdot 10^9$ m. De grijze balk geeft dat aan. Daar is te zien wanneer een maan vóór of achter de planeet langs gaat.



▲ Figuur 8.45

- 5 Leg uit of de twee manen in dezelfde richting om Jupiter draaien of in tegengestelde richting.

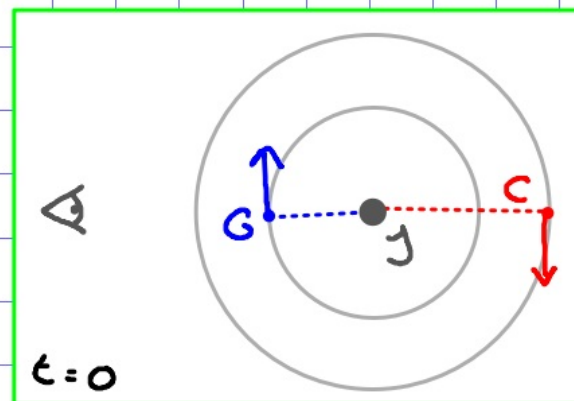
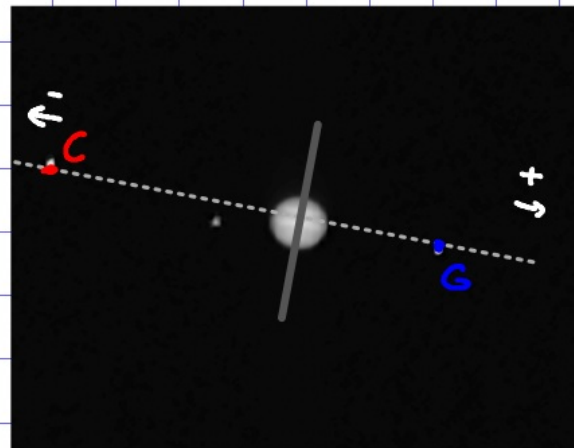
- 6 Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de amplitude én de periode van zowel Callisto als Ganymedes. Controleer in *Binas* of je uitkomsten kloppen.

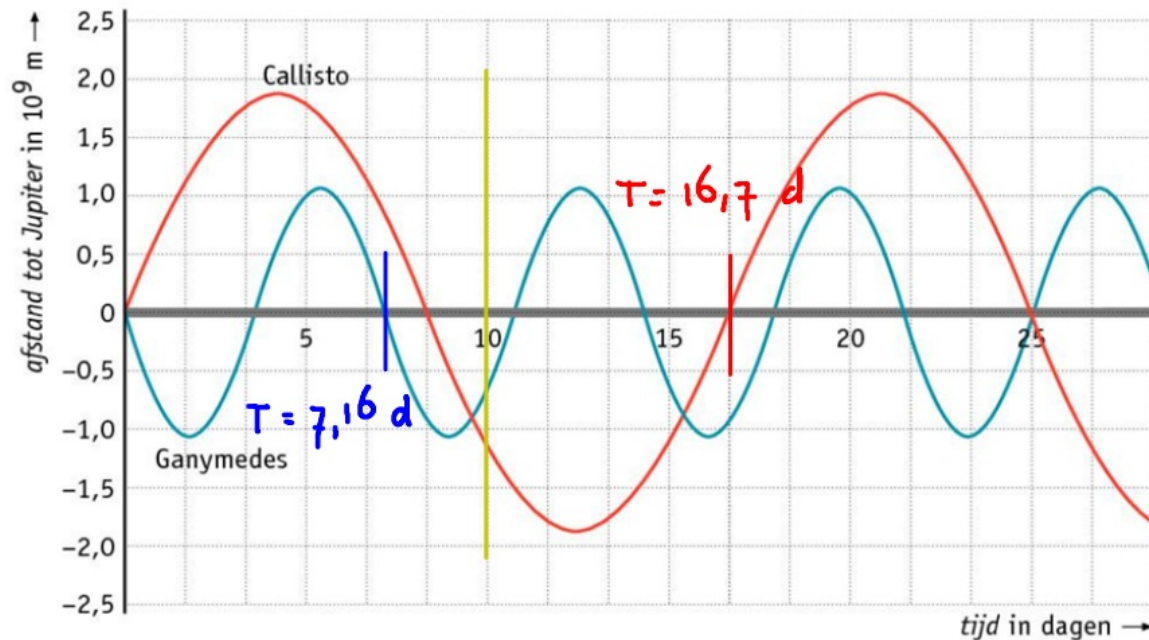
- 7 Bepaal het faseverschil tussen Ganymedes en Callisto na 10 dagen.

Op $t = 0$ dagen staan Ganymedes en Callisto tegenover elkaar t.o.v. Jupiter.

- 8 Lees af op welk tijdstip (ongeveer) de twee manen voor het eerst weer tegenover elkaar staan t.o.v. Jupiter.

- 9 Reken dat tijdstip ook uit.





▲ **Figuur 8.45**

$$\text{Ganymedes, } \varphi = \frac{t}{T} = \frac{10 \text{ d}}{7.16 \text{ d}} = 1.38 \quad \text{dus } \varphi_r = 0.38 \quad (+ 0.50)$$

$$\text{Callisto, } \varphi = \frac{t}{T} = \frac{10 \text{ d}}{16.7 \text{ d}} = 0.60$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0.90}$

Hoofdstuk 8: Trillingen

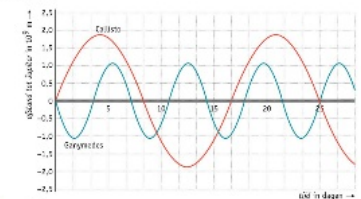
- In figuur 8.44 zijn de zwaarte-energie E_z van Joop ten opzichte van punt D en de veerenergie E_v van het koord uitgezet tegen de valafstand x , die gemeten wordt ten opzichte van punt B.
- 3 Teken in de figuur 8.44 het werkblad de grafiek voor de kinetische energie van Joop als functie van de valafstand x . Vermoedens weerstandskrachten.
- In werkelijkheid spelen weerstandskrachten bij bungeejumpen een belangrijke rol. Dat kun je zien als je naar een bungeejump staat te kijken.
- 4 Leg uit waarom je dat kunt zien.

Opgave 2 Manen van Jupiter

De twee grootste manen van Jupiter zijn Ganymedes en Callisto. Ze draaien beide in een cirkelvormige baan rond Jupiter. De twee manen bewegen in hetzelfde vlak. De zon ligt ook in dit vlak. Daardoor zien we vanaf de aarde de manen alleen maar heen en weer gaan, voorbij je achterhoofd vóór en achter Jupiter langs gaan.

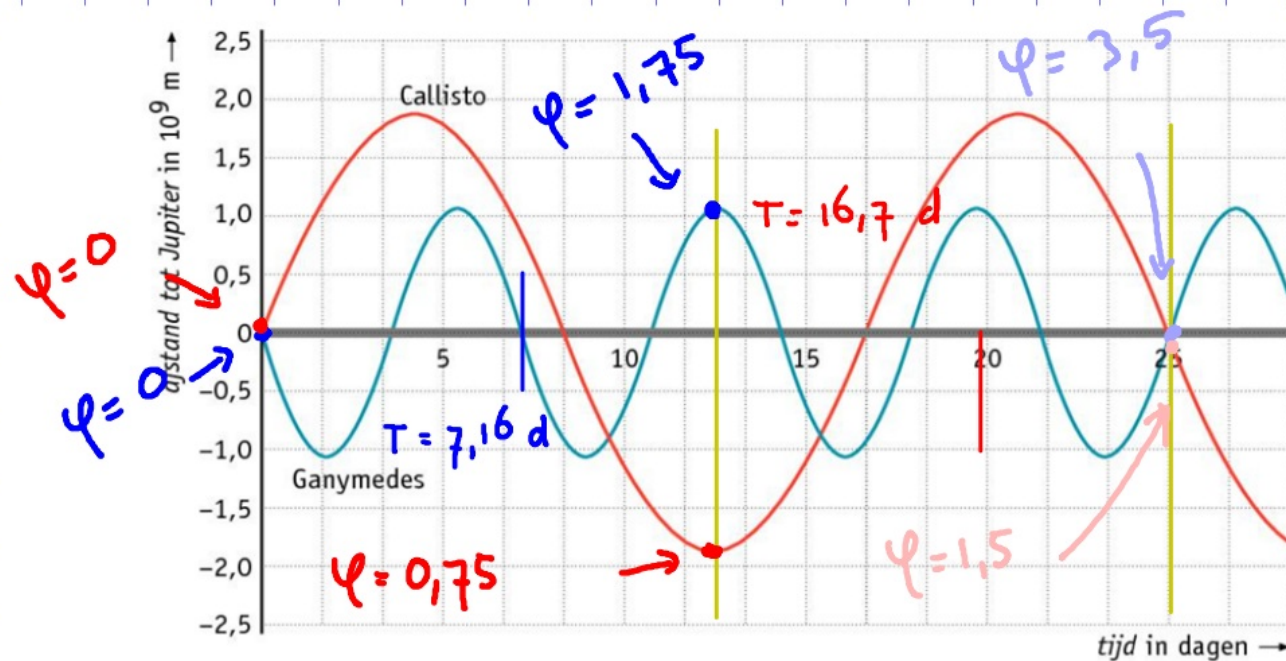
De beweging, zoals wij die zien is op te maken als een harmonische trilling.

Figuur 8.45 geeft de beweging van Ganymedes en Callisto gedurende 25 dagen. Jupiter heeft een straal van 0.0715×10^8 m. De grijze balk geeft dat aan. Daar is te zien wanneer een man vóór of achter de planeet langs gaat.



▲ **Figuur 8.45**

- 5 Leg uit of de twee manen in dezelfde richting om Jupiter draaien of in tegengestelde richting.
- 6 Bepaal zo nauwkeurig mogelijk de amplitude in de periode van zowel Callisto als Ganymedes. Controleer in atlas of je uitkomsten kloppen.
- 7 Bepaal het faseverschil tussen Ganymedes en Callisto na 10 dagen.
- Op $t = 0$ dagen staan Ganymedes en Callisto tegeneinander aan Loos Jupiter.
- 8 Lees af op welk tijdstip langzamer de twee manen voor het eerst weer tegeneinander staan Loos Jupiter.
- 9 Zien dat tijdstip ook uit.



▲ Figuur 8.45

$$\boxed{\varphi = \frac{t}{T}} \quad \Delta\varphi = 1$$

$$\frac{t}{7.16} - \frac{t}{16.7} = 1$$

$$\frac{16.7 \cdot t}{120} - \frac{7.16 \cdot t}{120} = 1$$

$$\frac{9.5 \cdot t}{120} = 1$$

$$\boxed{t = 12.6 \text{ d}}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

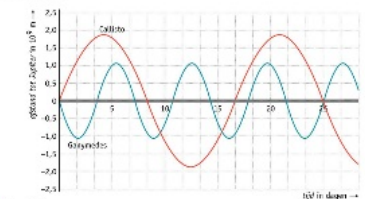
- In figuur 8.44 zijn de zwaarte-energie E_z van Joop ten opzichte van punt D en de veerenergie E_v van het koord uitgezet tegen de valafstand x , die gemeten wordt ten opzichte van punt P.
- 3 Teken in de figuur op het werkblad de grafiek voor de kinetische energie van Joop als functie van de valafstand x . Verwaarloos weerstandskrachten.
- In werkelijkheid spelen weerstandskrachten bij bungeejumpen een belangrijke rol. Dat kun je zien als je naar een bungeejump staat te kijken.
- 4 Leg uit waarom je dat kunt zien.

Opgave 2 Manen van Jupiter

De twee grootste manen van Jupiter zijn Ganymedes en Callisto. Ze draaien beide in een cirkel om Jupiter. De twee manen bewegen in hetzelfde vlak. De baan ligt ook in dit vlak. Daardoor zien we vanaf de aarde de manen af en toe heen en weer gaan, waarbij ze afwisselend voor en achter Jupiter langs gaan.

De beweging langs wij die zien is op te vatten als een harmonische trilling.

Figuur 8.45 geeft de beweging van Ganymedes en Callisto gedurende 28 dagen. Jupiter heeft een afstand van 4.29×10^8 m. De grijze balk geeft dat aan. Daar is te zien wanneer een man voor of achter de planeet langs gaat.



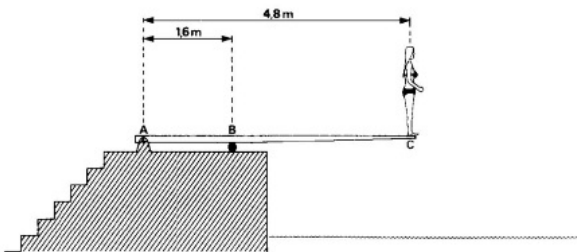
▲ Figuur 8.45

- 5 Leg uit of de twee manen in deze fase richting om Jupiter draaien of in tegengestelde richting.
- 6 Bepaal de nauwkeurig mogelijke amplitude en de periode van zowel Callisto als Ganymedes. Controleer in Bluts of je uitkomsten kloppen.
- 7 Bepaal het faseverschil tussen Ganymedes en Callisto na 10 dagen.
- Op $t = 0$ dagen staan Ganymedes en Callisto tegengesteld elkaar t.o.v. Jupiter.
- 8 Lees af op welk tijdstip langzamer de twee manen voor het eerst weer tegengesteld elkaar staan t.o.v. Jupiter.
- 9 Reken dat tijdstip ook uit.

Opgave 3 Een duikplank (Examen vwo 1986-I)

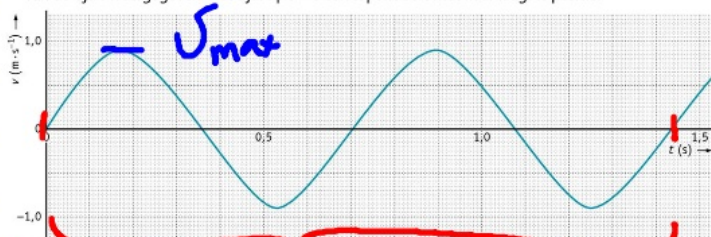
Een meisje met een massa van 45 kg staat op het uiteinde C van een duikplank, zie figuur 8.46. De plank is daar 12,9 cm doorgezakt.

- 10 Bereken met behulp van deze gegevens de veerconstante van de duikplank voor een belasting in punt C.



▲ Figuur 8.46

Het meisje brengt zichzelf in een verticale trilling door met haar benen afwisselend buig- en strekbevingen te maken. Na een poosje stopt zij hiermee. Zij voert dan in verticale richting een harmonische trilling uit, waarbij zij in contact blijft met de plank. In figuur 8.47 is haar snelheid v als functie van de tijd t weergegeven. Het tijdstip $t = 0$ correspondeert met haar laagste positie.



▲ Figuur 8.47

- 11 Bepaal met behulp van dit (v, t) -diagram de amplitude van deze trilling.

Het meisje vergroot de amplitude van de trilling. Bij de periodieke beweging die zij daarna uitvoert, komt zij tijdens elke periode enige tijd los van de duikplank. De periodieke beweging van het meisje bestaat dus uit twee gedeelten: een harmonische trilling zolang zij in contact is met de plank en een worp (verticale beweging onder invloed van alleen de zwaartekracht) als zij los is van de plank. Op een bepaald moment, we noemen dit $t = 0$, is het meisje in het laagste punt. In figuur 8.48 is van haar beweging een gedeelte van het (v, t) -diagram weergegeven. Dit (v, t) -diagram geldt voor elk punt van het lichaam van het meisje.

Hoofdstuk 8: Trillingen

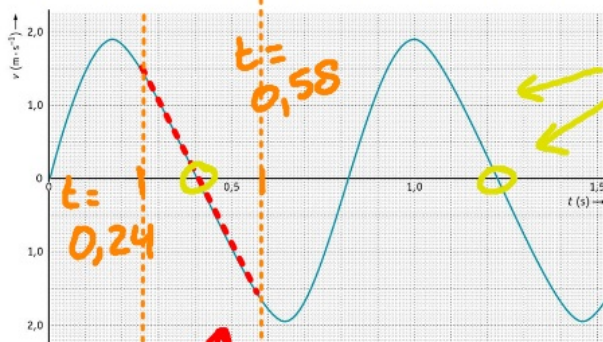
Toepassingen

11 $2 \cdot T = 1,44 \text{ s}$
dus $T = 0,72 \text{ s}$
 $v_{\max} = 0,9 \text{ s}$

$$v_{\max} = 2\pi \cdot \frac{A}{T}$$

Hoofdstuk 8: Trillingen

Toepassingen



▲ Figuur 8.48

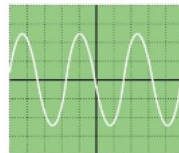
12 Leg met behulp van figuur 8.48 uit op welk(e) tijdstip(pen) tussen 0 en 1 s het meisje zich in het hoogste punt bevindt.

13 Tussen welke tijdstippen in het interval van 0 tot 1 s is het meisje los van de plank? Licht het antwoord toe.

Opgave 4 Een microfoonmodel

Een 'dynamische microfoon' bestaat uit een trilplaatje waaraan een spoeltje is bevestigd. Dat spoeltje trilt rond een magneetje, waardoor in het spoeltje een wisselspanning ontstaat.

Oscar probeert een model van zo'n microfoon te maken. Hij heeft een spoeltje aan een veer gehangen en laat dat verticaal trillen rond een staafmagneetje dat rechtop op tafel staat. Het spoeltje sluit hij aan op een oscilloscoop. In figuur 8.49 zie je welke wisselspanning hij ziet. De tijdschaal van de oscilloscoop staat op '50 ms/div'.



▲ Figuur 8.49

14 Bepaal de frequentie waarmee het spoeltje trilt.

De uiterste standen van het spoeltje liggen respectievelijk 3,2 cm en 5,8 cm boven de tafel.

15 Bereken de snelheid waarmee het spoeltje door de evenwichtsstand gaat.

Het spoeltje heeft een massa van 9,5 gram. De magneet weegt 13,5 gram. Oscar vraagt zich af hoe de frequentie zou veranderen als hij de magneet aan de veer zou hangen in plaats van het spoeltje. Van zijn klasgenoten krijgt hij de volgende suggesties:

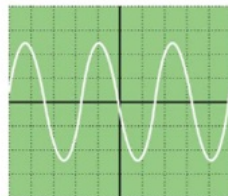
- A ongeveer 2 keer zo klein
- B ongeveer 1,4 keer zo klein
- C ongeveer 1,2 keer zo klein
- D ongeveer 2 keer zo groot
- E ongeveer 1,4 keer zo groot
- F ongeveer 1,2 keer zo groot

rechte stuk: constante versnelling, dus geen harmonische trilling

Opgave 4 Een microfoonmodel

Een 'dynamische microfoon' bestaat uit een trilplaatje waaraan een spoeltje is bevestigd. Dat spoeltje trilt rond een magneetje, waardoor in het spoeltje een wisselspanning ontstaat.

Oscar probeert een model van zo'n microfoon te maken. Hij heeft een spoeltje aan een veer gehangen en laat dat verticaal trillen rond een staafmagneetje dat rechtop op tafel staat. Het spoeltje sluit hij aan op een oscilloscoop. In figuur 8.49 zie je welke wisselspanning hij ziet. De tijdschaal van de oscilloscoop staat op '50 ms/div'.



▲ Figuur 8.49

- 14 Bepaal de frequentie waarmee het spoeltje trilt.

De uiterste standen van het spoeltje liggen respectievelijk 3,2 cm en 5,8 cm boven de tafel.

- 15 Bereken de snelheid waarmee het spoeltje door de evenwichtsstand gaat.

$$v_{\max} = 2\pi \cdot \frac{A}{T}$$

Het spoeltje heeft een massa van 9,5 gram. De magneet weegt 13,5 gram. Oscar vraagt zich af hoe de frequentie zou veranderen als hij de magneet aan de veer zou hangen in plaats van het spoeltje. Van zijn klasgenoten krijgt hij de volgende suggesties:

- A ongeveer 2 keer zo klein
- B ongeveer 1,4 keer zo klein
- C ongeveer 1,2 keer zo klein
- D ongeveer 2 keer zo groot
- E ongeveer 1,4 keer zo groot
- F ongeveer 1,2 keer zo groot

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{C}{m}} \leftarrow \frac{13,5}{9,5} = 1,4$$

$$\sqrt{1,4} = 1,2$$

↳ onder de streep, dus 1,2 keer zo klein

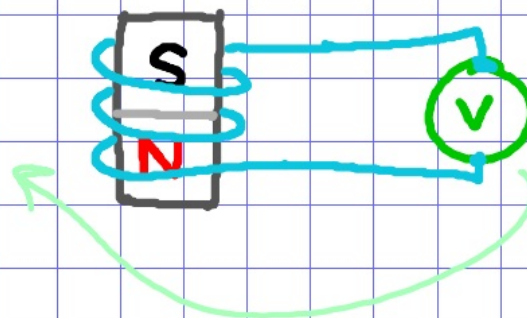
- 16 Kies het juiste antwoord. Leg het uit met zo weinig mogelijk rekenwerk.

Oscar gaat nu een veel realistischer model van een microfoon bouwen. Hij maakt een heel fijn spoeltje van slechts 0,20 gram en bevestigt dat aan een veertje. Om resonantie te voorkomen wil hij dat de eigenfrequentie van het spoeltje lager is dan de hoorbare frequenties, dus lager dan 20 Hz.

- 17 Leg uit waarom Oscar geen resonantie wil in zijn microfoon.

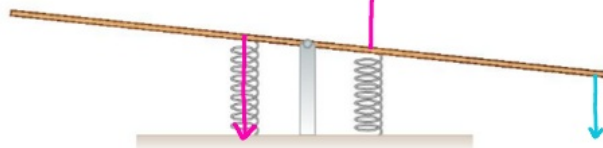
- 18 Bereken de maximale veerconstante die het veertje mag hebben.

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{C}{m}}$$



Opgave 5 Wipwap (Naar examen vwo 2011-II)

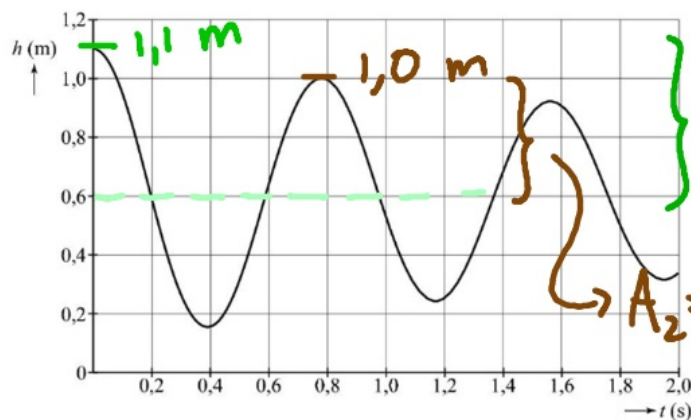
In figuur 8.50 zie je een schematische tekening van een zogenoemde wipwap. Als Linda op het rechter uiteinde van de wipwap gaat zitten, ontstaat de evenwichtssituatie die in figuur 8.50 is weergegeven. De twee veren zijn even stug en in de evenwichtssituatie niet gespannen.



▲ Figuur 8.50

- 19 Teken op het werkblad de krachten die beide veren op de wipwap uitoefenen in de juiste onderlinge verhouding.

Nu gaat Vera op het linker uiteinde zitten en gaan Vera en Linda wipwappen. Ze bewegen vanuit de evenwichtssituatie 50 cm omhoog en omlaag. Vanaf een bepaald moment zetten ze zich niet meer tegen de grond af en bewegen ze zich niet meer naar voren of naar achteren. Dit tijdstip noemen we $t = 0$ s.



▲ Figuur 8.51

Met behulp van een afstandssensor wordt vanaf dit tijdstip de afstand van de grond tot de onderkant van de rechter zitplank gemeten. Het resultaat van deze metingen vind je in figuur 8.51.

- 20 Bepaal met behulp van figuur 8.51 de grootste snelheid van de kinderen in dit tijdsinterval.

De wipwap met de twee meisjes kan opgevat worden als een massaveersysteem met een veerconstante van $4,5 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$.

- 21 Bepaal de massa van dit massaveersysteem die uit dat model volgt.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$$

Linda en Vera zetten zich weer af tegen de grond, zodat ze na verloop van tijd weer bewegen met een amplitude van 50 cm. Met de gegeven veerconstante van het massaveersysteem is de extra energie te berekenen die de kinderen daarbij gedurende één trillingstijd moeten leveren.

- 22 Bepaal met behulp van figuur 8.51 deze extra energie.

$$E_{\text{veer}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot A^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (0,50 \text{ m})^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (0,40 \text{ m})^2$$

$$\Delta E = E_1 - E_2$$

20 Bepaal met behulp van figuur 8.51 de grootste snelheid van de kinderen in dit tijdsinterval.

De wipwap met de twee meisjes kan opgevat worden als een massaveersysteem met een veerconstante van $4,5 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$.

21 Bepaal de massa van dit massaveersysteem die uit dat model volgt.

Linda en Vera zetten zich weer af tegen de grond, zodat ze na verloop van tijd weer bewegen met een amplitude van 50 cm. Met de gegeven veerconstante van het massaveersysteem is de extra energie te berekenen die de kinderen daarbij gedurende één trillingstijd moeten leveren.

22 Bepaal met behulp van figuur 8.51 deze extra energie.

Opgave 6 Dwars door de aarde

De aarde is van binnen erg heet en vloeibaar, dus we zullen daar wel nooit doorheen kunnen. Maar het is leuk om te bedenken wat er allemaal mogelijk zou zijn als dat wel kon. Stel dat we een buis aanleggen vanuit Nederland via het middelpunt van de aarde naar 'de overkant'. We komen dan uit bij de Antipodeneilanden in de buurt van Nieuw-Zeeland. De buis pompen we vacuüm zodat er geen luchtweerstand is. Als we dan hier, op zeeniveau, een pakje in de buis laten vallen, dan beweegt het versneld naar het middelpunt van de aarde en vanaf daar vertraagd naar de overkant. Daar kunnen ze het zo aanpakken, want het komt precies op zeeniveau weer tot stilstand.

23 Zoek op in *Binas* hoe lang die buis dan moet zijn.

24 Leg uit dat het pakje precies op zeeniveau weer tot stilstand komt.

Voor de valafstand kun je schrijven $h = \frac{1}{2}gt^2$ met h de afstand in m en t de tijd in s.

25 Reken uit hoelang het pakje er over doet om aan de overkant te komen. Ga daarbij uit van een constante valversnelling van $9,81 \text{ m/s}^2$.

26 De versnelling is natuurlijk niet constant. Geef daarvoor twee mogelijke oorzaken.

De zwaartekracht binnen de aardbol kan benaderd worden met de formule:

$$F_z = m \cdot g \cdot \left(\frac{r}{R}\right)$$

Hierin is g de valversnelling aan het oppervlak, m de massa van het pakje, R de straal van de aarde en r de afstand tot het middelpunt van de aarde.

27 Leg uit hoe je aan deze formule kunt zien dat de beweging van het pakje in de buis een harmonische trilling is.

28 Toon aan dat voor de trillingstijd van deze trilling geldt: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$

(Hint: bepaal eerst de 'veerconstante' van deze trilling).

29 Bereken nu hoelang ons pakje erover doet om aan de overkant te komen.

Hoofdstuk 8: Trillingen

Toepassingen

Opgave 6 Dwars door de aarde

De aarde is van binnen erg heet en vloeibaar, dus we zullen daar wel nooit doorheen kunnen. Maar het is leuk om te bedenken wat er allemaal mogelijk zou zijn als dat wel kon.

Stel dat we een buis aanleggen vanuit Nederland via het middelpunt van de aarde naar 'de overkant'. We komen dan uit bij de Antipodeneilanden in de buurt van Nieuw-Zeeland. De buis pompen we vacuüm zodat er geen luchtweerstand is. Als we dan hier, op zeeniveau, een pakje in de buis laten vallen, dan beweegt het versneld naar het middelpunt van de aarde en vanaf daar vertraagd naar de overkant. Daar kunnen ze het zo aanpakken, want het komt precies op zeeniveau weer tot stilstand.

23 Zoek op in *Binas* hoe lang die buis dan moet zijn. $\rightarrow 12,74 \cdot 10^6 \text{ m}$

24 Leg uit dat het pakje precies op zeeniveau weer tot stilstand komt.

Voor de valafstand kun je schrijven $h = \frac{1}{2}gt^2$ met h de afstand in m en t de tijd in s.

25 Reken uit hoelang het pakje er over doet om aan de overkant te komen. Ga daarbij uit van een constante valversnelling van $9,81 \text{ m/s}^2$.

26 De versnelling is natuurlijk niet constant. Geef daarvoor twee mogelijke oorzaken.

De zwaartekracht binnen de aardbol kan benaderd worden met de formule:

$$F_z = m \cdot g \cdot \left(\frac{r}{R}\right)$$

Hierin is g de valversnelling aan het oppervlak, m de massa van het pakje, R de straal van de aarde en r de afstand tot het middelpunt van de aarde.

27 Leg uit hoe je aan deze formule kunt zien dat de beweging van het pakje in de buis een harmonische trilling is.

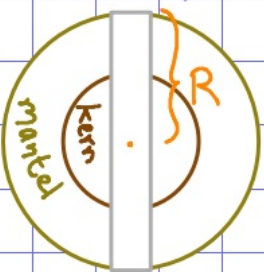
28 Toon aan dat voor de trillingstijd van deze trilling geldt: $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$

(Hint: bepaal eerst de 'veerconstante' van deze trilling).

29 Bereken nu hoelang ons pakje erover doet om aan de overkant te komen.

$$25) S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{a}}$$
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 12,74 \cdot 10^6}{9,81}} = 2,28 \cdot 10^3 \text{ s}$$

(38 min)

26) 

27) $F_z = m \cdot g \cdot \left(\frac{r}{R}\right)$

$F_v = C \cdot r$

28) $C = \frac{m \cdot g}{R}$

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{C}}$

$$T = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{m \cdot g}{R}}} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{\frac{g}{R}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$